



NAZIONALE

B. Prov.

Per.

68

NAPOLI

BIBLIOTECA

VIT. E.A. III

Periv. 17
BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XXXII



B

Palchetto

Num.° d'ordine /

Perimeter Path 68

Vol 10 1/2

MISCELLANEA
PHILOSOPHICO-MATHEMATICA.

MISCELLANEA
PHILOSOPHICO -- MATHEMATICA
SOCIETATIS PRIVATAE
TAURINENSIS
TOMUS PRIMUS.



AUGUSTÆ TAURINORUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

M D C C L I X.

ATTENTION: CHAIRS

IN THE CHAIRS

212 HENRY

STATION

JOHN H. HAY

STATION

STATION

STATION



A SON ALTESSE ROYALE
MONSEIGNEUR LE DUC DE SAVOYE.

MONSEIGNEUR

*L'Ouvrage que nous avons l'honneur de
vous présenter est le premier fruit des tra-*

vaux que nous avons commencé sous vos
Auspices, & la protection que V. A. R.
veut bien lui accorder, d'autant plus flat-
teuse pour nous qu'elle est éclairée, pré-
viendra le Public en sa faveur. La supé-
riorité des connoissances qui vous distinguent
dans le rang élevé où vous êtes placé, vous
fait appercevoir ces liaisons secrètes, & ces
rapports qui échappent au commun des hom-
mes, par lesquels les sciences les plus ab-
straites conduisent souvent aux plus utiles
découvertes pour la Société; c'est de ce
point de vue que vous vous intéressez à
l'avancement des sciences, & qu'en dai-
gnant jeter un oeil favorable sur ceux qui
les cultivent, vous nous retracez les grandes
qualités qui brillent dans N O T R E
AUGUSTE SOUVERAIN.

Puisse, MONSEIGNEUR, ce premier essai répondre à son objet, & être en quelque façon digne de vous : ou puisse du moins notre exemple inspirer à des talens supérieurs le désir, & le courage d'y satisfaire plus amplement. Pour nous, il nous sera toujours assés glorieux de pouvoir vous offrir nos respectueux hommages.

De V. A. R.

MONSEIGNEUR

*Les très-humbles, & très-obéissans Serviteurs
Saluce, De La Grange, Cigna.*

Imprimatur. Provic. S. Officii Taurini.

V. Berta LL. AA. P.

Se ne permette la Stampa

NICCOLO' DI QUAREGNA per la gran
Cancellaria.

DE IIS, QUAE IN SOCIETATE
ACTA SUNT

COMMENTARII

A JOH. FRAN. CIGNA

CONSCRIPTI.

THE
JOURNAL
OF
THE
ROYAL ANTHROPOLOGICAL INSTITUTE

VOL. LXXV. PART I. 1905.

LONDON: PUBLISHED BY THE INSTITUTE.

1905.



DE BELLINIANO PROBLEMATE ,
S E U
DE OVORUM ELIXATORUM
CICATRICULA.



UM ova lampadis calore foveremus, parata machina ad imitationem illius, quae in Berolinensis Academiae monumentis describitur (a), praecipuos Auctores consulebamus, qui de ovo, aut formatione pulli commentati fuerant, ut eorundem lectione studia nostra dirigi possent, & adjuvari. Inter hos Bellinum quoque adivimus, penes quem cum praeclara multa, & laude digna reperiremus, tum illud in primis admirabile nobis videbatur, quod nomine belliniani problematis solemne est: cicatriculam, dum ova elixantur, e superficie vitelli in centrum abire, idque

A 1 co

(a) An. 1749.

eo magis admirationem nostram excitabat, quod in incubatis ovis rem aliter se habere, & cicatriculam post elixationem remanere in superficie Bellinus ipse traderet: tenebamur itaque desiderio, ut rem miram nostris oculis intueremur, cui ut satisfaceret, ab incubatis ovis exordium duximus. Horum unum elixatum cortice, & albumine nudavimus, & cicatriculam cum contento pullo ad vitelli superficiem revera invenimus paullo infra obtusum ovi verticem medio, ut solet, inter *calazas* loco, & tenuissimae albuminis parti subjectam esse observavimus, quae omnia diligentius a nobis adnotata sunt, ut eo facilius in posterum, si quando opus esset, cicatriculam reperiremus. Observata cicatricula vitellum per centrum secimus, & in centro ipso praeter omnem expectationem corpus invenimus albidum, tenerum, quale nempe nomine cicatriculae ad centrum latae in ovis non incubatis, & elixatis Bellinus descripserat: & hujus quidem corporis cum belliniana cicatricula omnimodam similitudinem declaravit comparatio, quae cum cicatricula ad centrum recentis ovi elixati inventa instituta fuit: quae cum omnium, ut inquebam, expectationem fefellissent, in causa fuerunt, cur nostrum aliquis hujusmodi dubitationes proponeret. An non causa, quae in ovis non incubatis, dum elixantur, cicatriculam ad centrum pellit, id multo magis in incubatis efficere deberet, in quibus incubationis calore cicatriculae nexus resolvuntur, atque laxantur? An non fieri potuit, ut in ovis non incubatis cicatricula ad vitelli superficiem posita ob parvitatem Bellini diligentiam effugerit, qui dum ubique eandem sollicitate perquireret, in corpus album incidit in centro vitelli positum, idque corpus similitudine aliqua deceptus pro cicatricula habuerit? Enim vero si vera esset cicatricula in incubatis ovis, quorum cicatricula in superficie remanet, ad centrum neutiquam reperiretur. Quamquam porro hisce conjectationibus aliquam veri speciem

ciem inesse omnes faterentur , ne tamen iisdem leviter adeo indulgeremus , Bellini fides , & auctoritas illustrium Scriptorum testimonio confirmata , & ingenuus veritatis amor prohibebant . Statuimus itaque in non incubatis , elixatisque ovis vitelli superficiem omni diligentia perlustrare , ut experiremur , num forte hac in re Bellino feliciores esse possemus , secus arduam inquisitionem dimitteremus potius , quam ut magni Viri diligentiae , aut candori temere quidpiam detraheremus . Suscepta igitur inquisitio est in primis ab Equite Salutio , qui non leve industriae , ac dexteritatis suae hac in re specimen exhibuit ; ostendit enim in plerisque recentibus ovis , quae elixari , ac indurari omnino curaverat cicatriculam ad vitelli superficiem adhuc haerentem , quam cicatriculam esse , tum ex situ demonstrabat , qui medius erat inter *calazas* paullo sub obtuso ovi vertice , & tenuissimae albuminis parti respondebat , ut in incubatis ovis contigisse diximus , tum ex figura , quae annulis conflata erat , & cicatriculam recentium ovorum non elixatorum plane aemulabatur , tum demum ex aliquali ejusdem prominentia supra vitelli superficiem , quam respondens indurati albuminis foveola recipiebat ; adeo ut integro adhuc albumine exteriora ovi perlustrans cicatriculae locum certissime indicaret . Ad centrum porro albidum Bellini corpus perpetuo inveniebat , dummodo nec nimis parum , nec diu nimis excocta ova fuissent , quibus in casibus vel nullum , vel obscurius id corpus conspiciebatur . Haec cum saepissime omnium oculis Vir diligentissimus exhibuisset paullo liberius de belliniani inventi veritate dubitare caepimus , Auctoresque perquirere , si qui forte experimenta haec iterassent , aut illustrassent , ut ex illorum observationibus nostrae confirmari , vel refelli possent . Occurrebat itaque Cl. Balbi dissertatio bononienfibus commentariis inserta (*b*) , in qua cum Bel-

A 2.

lini

(*b*) Tom. 2. par. 2. pag. 369. & seq.

lini experimenta renovasset problematis solutionem ex mechanicis principiis deducere conatus est. In illis autem experimentis observavit, postquam ova sex horae minuta in ebulliente aqua detenta sunt, cicatriculam adhuc suo manere loco, quamquam altius eo tempore vitellus obduruerit. Inde vero novum dubitationi nostrae fundamentum accessit; neque enim ullo modo concipere poteramus, quo pacto cicatrix per obduratum vitelli stratum permeare potuisset in tanta teneritudine, & integra deinceps ad centrum pervenire. Postquam novem horae minuta ova in ebulliente aqua Balbi detinuerat, cicatriculam in centro vitelli se reperiisse refert evidentissimam; sub-albidum scilicet corpus a Bellino habitum pro cicatrix; eo autem in loco de vitelli superficie non meminit Cl. Auctor, ut videatur Bellini fidei innixus corpus illud albidum, quod in centro repperat, pro cicatrix habuisse, omnemque adeo cicatriculam in vitelli superficie inveniendi curam abjecisse, utpote quam inutilem fore praevideret. Nos contra, quibus Bellini observationes jam suspectae erant, in ovis iis, quae decem, & ultra minuta in ebulliente aqua elixata fuerant reperta cicatrix ad vitelli superficiem posita, hanc comparabamus cum illa, quam in ovis, quae quinque tantum minuta elixata fuerant, Balbi deprehenderat, cumque omnino similem esse cerneremus, jam nulla supererat dubitatio, cicatriculam post quodcumque ebullitionis tempus nunquam a vitelli superficie recedere. Ad albidum corpus quod spectat in centro vitelli positum, tum in ovis non incubatis, quod Balbi observaverat, tum in incubatis, quod nostrae observationes nos docuerunt, non reperiri, aut obscurius cerni certum est, quando vel diutius, quam par esset, vel per brevius tempus in ebulliente aqua ova detenta fuerunt.

Ne autem in tanta clarissimorum Virorum aliter sentientium auctoritate nostrae observationes sua veritate, & fide desti-

71

destituerentur Cl. Bertrandi Regium Chirurgum, Regium-
que Professore, ac Parisiens. Chirurg. Acad. Socium ea-
rundem participem esse volumus, qui postquam ipsas plu-
ries omni diligentia renovasset, ambiguas neutiquam esse
conclufit. Gavisi itaque non mediocriter fuimus qualia-
cumque haec tentamina omni difficultate physicos expe-
dire.

DE VARIA BAROMETRORUM DIVERSAE DIAMETRI ALTITUDINE.

I. CUM Bononientis Academiae commentarios per-
volverem, atque ex praeclaris inventis, quibus
elegantissima volumina referta sunt, plurimum jucunditatis,
utilitatisque perciperem, in eum locum incidi, ubi Clar.
Balbi experimenta narrantur, quae ad variam barometro-
rum diversae diametri altitudinem spectant, eamque Clarif.
Auctoris sententiam esse intellexi, ut censeat capillarium
tuborum exemplo, minorem angustiorum barometrorum
altitudinem a majori tuborum, quibus construuntur vi re-
pellente esse repetendam (*a*), ita tamen, ut repellens ea
vis in superiori vacua barometrorum parte in primis se-
dem habeat (*b*), & (quemadmodum experiundo inve-
nit) frigore ad eam partem admoto imminui possit, re-
stituto calore iterum adaugeri (*c*): Cum vero haec se-
mel, iterumque attente perlegissem, quemadmodum Clarif.
Viri industriam, & experiundi peritiam magnopere admi-
rabar, ita de phaenomeni causa penitus consentire non po-
teram.

2. Primo enim animadvertēbam vim repulsivam tuborum
capillarium, si quae sit, eam in vacua parte minime po-
sitam

{*a*} Com. t. a. par. 1. a pag. 307. ad 311., & a pag. 353. ad 360.

{*b*} Ibid. p. 354. & seq.

{*c*} Ibid. p. 356.

fitam esse, cum diametro tantummodo respondeat, nec varia vacuae partis longitudine mutetur (*d*), nec proinde barometrorum vim repellentem in vacua parte esse reponendam. Deinde vero si vel maxime in vacua barometrorum parte vis repellens locata esset, eam frigore augeri potius, quam minui debuisse, quandoquidem, ut ipse Balbi advertit, frigoris vi tubi constringuntur (*e*), eoque magis, quod in tubis capillaribus nulla hujusmodi proprietas nec a Balbi, nec ab aliis fuisset observata.

3. Conjecturam itaque feci mercurii depressionem in angustioribus barometris deberi potius pressioni relictæ in vacua parte aëris, qui vel majori copia in angustioribus tubis adesset, vel arctius spatium nactus, proindeque densior subjectum mercurium vehementius comprimeret, admoto autem ad supremam barometri partem frigore ita constringeretur, ut minorem pressionem exerceret. Enim vero dum perpendebam, quam difficile sit omnem e barometris aërem penitus expellere, dum difficultatem in angustioribus tubis majorem esse cogitabam, dum Muschembroekii diligentiam in omni expellendo aëre Balbi supervacaneam existimasse legebam (*f*), non parum in mea suspitione confirmabar.

4. Eo itaque adductus sum, ut meam hanc qualemcumque suspensionem cum Sociis communicarem, quos inter Ludovicus de la Grange eandem non modo non improbavit, verum etiam experimentum indicavit, quo definiri facile posset: proposuit nempe, ut accuratissima barometra conficerentur ex tubis diversae diametri, qui in infima parte flexi sursum crus promitterent barometrico tubo aequale,

&c

(*d*) Institut. Neuton. de M. Sigorgne §. 364. 375.

(*e*) L. c. p. 356.

(*f*) L. c. p. 357. cum similia experimenta Florentini proposuissent ex hac ipsa causa pendere Muschembroechius definivit cum in accuratissimis barometris calore, aut frigore ad supremam partem admoto mercurii altitudinem non mutari observaverit. Vide additamenta ejusdem ad Acad. Flor. in Collection Académique partie étrang. Tom. 1. p. 26.

& parallelum, ut in ipsum mercurius infundi posset, sicque aër, si quis esset, in vacua barometri parte in brevius spatium coërceri. Si enim, inquiebat, addito per vices mercurio, ipsius altitudo supra libellam minueretur, & decrementsa altitudinis relictæ post singulas additiones in suprema barometri parte vacui spatii inversam rationem sequerentur, inde confici posse depressionem barometri tribuendam esse fluido elastico in superiori barometri parte contento, cujus elasticitas in ratione inversa voluminis adaugeretur, qualem aëris proprietatem esse ad certos usque limites Physici noverunt (g).

5. Experimentum igitur caepimus, omnique diligentia saepe iteravimus, cum barometrorum alterum vix dimidiam lineam in diametro haberet, alterum paullo minus quam duas, & mercurius quidem in angustiori tubo quatuor circiter lineas inferius haesit, quam in ampliore, infusoque, ut propositum erat, in crus alterum mercurio altitudo barometri supra libellam imminuta est, ita ut decrementsa altitudinis relictæ in suprema parte vacui spatii inversam rationem quam proxime servarent, quamquam in horizontali situ collocato barometro exigua tantum in suprema parte aëris bulla deprehenderetur, quae vix aciculae caput magnitudine aequaret. Verbo dicam, talem fuisse hujus experimenti exitum, ut Cl. Auctor jam exploratum narrasse, potiusquam novum proposuisse videretur. Jam vero si a vacua barometri parte mercurius repelleretur imminuta vacuae partis longitudine simul & repulsio minui debuisset, ut Bononienses Academici alicubi fatentur (h): at contrâ, ut dictum est, mercurii depressio major evadabat.

B

6. Quam-

- (g) Cogitavi deinceps experimentum faciliori opera absolvi posse etiam barometris qualia a Physicis parari solent, dummodo magis, minusve iisdem inclinatis, & magis, minusve ea ratione condensato, si quis esset, in vacua parte aëre normalis mercurii altitudo supra libellam metiretur, & varia ipsius decrementsa, aut incrementa notarentur.

(h) P. 355.

6. Quamquam porro eo in experimento expectationi eventus adamussim respondisset, nondum tamen eidem acquievi, quin imo veritus sum, ne minori diligentia nostra barometra constructa fuissent, atque adeo residui aëris pressio simul cum vi vitri repellente conjungeretur, cum in iis, quae accuratiora Balbi parasset, sola vis repellens omnem depressionem effecisset. Alio itaque experimento directe investigare constitui, quantum tuborum vis repellens, si quae esset, in deprimendo mercurio valeret.

Itaque animadvertendam vim repellentem ab aëre non oriri, nec ab aëris actione ullo modo mutari (i) oportere, adeo ut, si quae differentia esset vis repulsivae inter binos tubos barometricos, eadem etiam in iis apertis se proderet. Binos igitur tubos, quorum unus duas lineas patebat in diametro, alter vix unam, ita inferiori extremitate jungendos curavi, ut deinceps flexi sursum normaliter erigerentur, juncturae autem locus esset in media inferiori parte. Tuborum parietes eandem propemodum crassitudinem habebant, eodem vitro conflati fuerant, altitudo erat eadem, quanta barometrorum esse solet, erat autem uterque apertus in superiori extremitate. Hos mercurio implevi ad eam altitudinem, ad quam mercurius in barometro suspenditur, ut differentia altitudinis mercurii in binis tubis differentiam vis repulsivae in barometris ejusdem diametri ostenderet: veruntamen mercurius ad libellam propemodum compositus est, ut vix tertia, quartave lineae parte in angustiori tubo depressior deprehenderetur. Dum vero hoc experimentum cum iis comparabam, quae Cl. Galeatius instituit, in quibus nempe inter barometra ejusdem diametri differentiam altitudinum trium linearum fuisse observavit (k), verosimillimum videbatur depressionem eam barometrorum a Balbi observatam vel plane totam,

(i) Sigorgne l. c. §. 329.

(k) P. 309. 310.

totam, vel saltem maxima ex parte alii causae, quam vi tuborum repellenti esse adscribendam.

7. Dum haec tentarentur, Eques Salutius novam indicavit experimenti speciem, quae rem totam mirifice illustrare non tantum posset, verum etiam sola quaestioni ab solvendae sufficeret: proposuit nempe, ut communicantes barometrici tubi, quibus in superiori experimento usus fueram (6) mercurio implerentur, tum in vas mercurium continens inverterentur; sic enim bina barometra inaequalis diametri esse proditura, quae cum commune in suprema parte vacuum spatium haberent, aequalem etiam a residuo, si quis forte remaneret, in ea parte aëre pressio- nem paterentur, atque adeo solum effectum vis repulsivae suarum altitudinum differentia certissime definirent.

Eos igitur tubos iterum replevimus, & candentium prunarum calori exposuimus, ut mercurius ebulliret, sicque prodeuntes ab ipso aëreae bullae per immisum, blandeque commotum filum ferreum educerentur: his peractis, inversisque tubis eandem fere ac in superiori experimento altitudinum differentiam invenimus, quae scilicet tertiam, quartamve lineae partem aequaret.

8. Quidquid igitur de priori experimento sentiendum sit (6), postremo (7) difficultatem omnem tolli, & nostram sententiam luculentissime confirmari censemus. Erant enim bina barometra, quae in reliquis cum Academicorum Bononiensium barometris omnino convenirent, atque adeo vis repulsivae effectum non minus, quam illa ostendere deberent: quapropter cum Bononienses Academici multo majorem altitudinum differentiam obtinuerint; concludendum omnino est, copiosiori aëri in minori barometro relicto eandem esse adscribendam, quum commune in nostris barometris vacuum spatium nullam hujusmodi differentiam admitteret. Voluimus etiam experiri, num ex admota glacie ad supremam partem altitudo mercurii adaugeretur, &

magis quidem in angustiori barometro, num contra ex admoto calore minueretur, & magis quidem in minori, id enim ex Balbi theoria sequebatur, cum nostra contrarium suaderet; altitudinum namque incrementa, & decrementa in utroque tubo aequalia futura erant, siquidem ex condensatione, & rarefactione relictæ in vacua parte communis aëris penderent, cum inaequalia esse deberent, si ab aucta, vel minuta tuborum vi repellente orirentur. Sed frustanea fuit in hanc rem adhibita opera; neque enim vel ex admotis calidis linteis, vel ex admota glacie mercurii altitudo in tubis mutata est; deinceps vero cum aëris aliquae bullae in eam vacuum partem consulto admisæ fuissent, tunc equidem glaciei frigore mercurium elevari, ex linteorum calore iterum deprimi observavimus, ut tamen altitudinum incrementa, & decrementa in utroque tubo ad amussim aequarentur: ex quo fit manifestum mercurii altitudinem ex frigore, vel calore non mutari, siquidem superior barometri pars aëre accuratissime vacua sit, quod vero incrementum, vel decrementum ex calore, & frigore observatur, id relictæ in ea parte aëri tribuendum esse, qui aequalia incrementa, & decrementa efficiat, si communis, & aequè densus in utroque barometro sit, quemadmodum in nostro experimento contingit, inaequalia vero, si inaequali copia, & impari densitate relinquantur, quemadmodum in Bononiensium barometris accidisse ex hæcenus dictis colligi posse censemus.

9. Eisdem tubos iterum mercurio purissimo implevimus, & pari industria aëre expurgavimus, eandemque altitudinum differentiam obtinuimus. Iterum pariter glacie per immissum nitri spiritum admodum refrigerata, & candentibus bracteis ferreis supremam partem refrigerare, & calefacere per vices curavimus; at non minus frustanea opera nostra fuit, cum aequè immobilis, ac in priori tentamine mercurius persistisset.

10. Eof-

10. Eisdem etiam tubos ex utraque parte apertos in vas mercurio plenum injecimus, ut depressionum differentiam reperiremus, eamque iterum tertiam, quartamve lineae partem non excedere observavimus, in qua constanti experimentorum consensione (6. 7. 9.) veritatis non leve argumentum inesse consideranti patebit.

11. Aliqua quidem nascebatur difficultas ex iis experimentis, quae in vacuo boyleano a Viris Cl. capta sunt: in quibus nempe educto aëre, & mercurio in utroque barometro descendente, auctaque adeo vacuae partis capacitate, differentia tamen altitudinum eadem perseverabat, id enim Cl. de la Grange experimento in primis adversabatur. Etenim si in eo experimento imminuta vacuae partis capacitate differentia altitudinum augebatur, aucta in hoc experimento eadem capacitate differentia imminui similiter debuisset. Legebamus quidem Plantadium observasse in montibus ultra centum hexapedas altis omnem differentiam sublatam fuisse, quod cum Bononiensium experimentis opponeretur nostrae theoriae, & experimentis apprime erat contentaneum: quamquam enim ipsi proponant in Plantadii observatione vi frigoris in montibus eam differentiam sublatam fuisse, cum tamen, ut demonstravimus, frigus differentiam non minuat, nisi relictæ aëris elasticitatem minuendo minime dubium videtur, id etiam magna ex parte ex descensu mercurii, & ejusdem aëris rarefactione contigisse, ex qua non minus quam ex frigore ejusdem elasticitas minor evadit.

12. Ea igitur experimenta repetenda suscepimus, ut si fieri posset, diversitatis causam assequeremur: & revera maximam in iisdem varietatem invenimus. Quando enim barometris utebamur, quae supra candentes prunas aëre expurgata non fuerant, inter exanthlandum altius barometrum depressiori aequale evadebat, & cessante emboli motu pristina differentia redibat, quemadmodum Bononienses observarunt; alias, quando accuratissime supra candentes prunas

prunas barometrorum mercurius aëre fuerat repurgatus, durante emboli motu amplius barometrum deprimebatur, & in eadem depressione etiam cessante emboli motu permanebat, quod cum Plantadii experimento in primis convenire videtur. Arbitrabamur itaque in priori casu, cessante emboli motu, novum aërem, & quidem copiosius in angustiori barometro ex parietibus labente mercurio detectis, vel ex mercurio ipso prodiisse, eumque aërem pristinam differentiam restituisse, quod in barometris aëre expurgatis similiter contingere non potuerit.

13. Revera hanc descensuum anomalias aëri in suprema barometrorum parte contento, vel deinceps a mercurio, aut vitro erumpenti tribuendas esse demonstrat experimentum barometris communicantibus in machina pneumatica institutum; ea quippe barometra, quae eandem propemodum, ut dictum est (7), altitudinem habebant, dum aër educeretur, aequali omnino celeritate descendebant, & eandem altitudinis aequalitatem servabant etiam quiescente embolo, & similiter aëre in recipiens pneumaticum pedetentim admissio pari gradu ascendebant, ut aequae alta perpetuo remanerent.

14. Superest, ut moneam Muschembroeckium, Desagulierum, Sigornium, aliosque primae notae Physicos ostendisse, mercurium a vitro non solum non repelli, quin potius ab eodem attrahi; depressionem autem mercurii in capillaribus tubis fieri docuisse excessu vis attrahentis partium mercurii inter se supra vim attrahentem vitri (1); quapropter cum ea attractionis differentia locum non habeat,

(1) Mercurium absque vi repellente deprimi posse cognovi, dum ipsum inter aëneam bracteam ad acutissimum angulum flexam ita in curvam sinuavi observavi, ut maxime depressus prope angulum esset, & eo elatior, quo magis bractee crura divergerent, non secus ac inter vitreas laminas contingat. Mercurium autem ab aëre repelli nemo dixerit, cum in eo ipso experimento aëneae laminae margo in mercurium immerfus eodem imbutus, infectusque sit & mercurius a Chymicis cum aëre in amalgama uniatur &c.

beat, si barometrum ex unico inflexo tubo construat, absque eo quod in subjectum vas mercurio plenum immergatur, patet modus, quo in angustissimis etiam barometris mercurii depressio ab ea causa orta declinari possit. Hoc autem artificium etiam in hypothesi vis repellentis ipsius effectus praecavebit; cum enim vis repellens perinde ac vis attrahens, si quae sit in tubis, eadem remaneat quaecumque sit ipsorum longitudo, & quantacumque ipsorum pars in attractum, aut repulsum fluidum immergatur (*m*), manifestum sit repulsionem mercurii in barometro haerentis a repulsione ejusdem in altero crure elidi, ac corrigi debere.

DE CORRIGENDIS BAROMETRORUM ERRORIBUS EX CALORE, ET FRIGORE NATIS.

I. **B**arometrorum mutationes non solum ex variata atmosphaerae pressione ortum ducere, verum etiam ex vario caloris gradu, qui mercurii densitatem immutet a longo jam tempore Physicis innotuit, factumque propterea est, ut effectibus caloris a gravitatis effectibus distinguendis ab eo tempore incubuerint: veruntamen correctiones hujusmodi proposuerunt, quae pro unaquaque barometri observatione experimenta requirerent, aut computationes, quorum alterum difficile erat, alterum incommodum. Laudabile proinde visum est Ludolff consilium, qui in monumentis Acad. Sc. Berol. (*a*) talem correctionem proposuit, ut absque experimentis, & absque computis ex solius scalae barometricae observatione vera atmosphaerae pressio quocumque tempore cognosceretur. Id duntaxat

(*m*) Quae de attractione Sigornius demonstrat §. 330. 375. ad vim repulsionem transferri facile possunt, cum eae vires non nisi ob contrariam directionem inter se differant.

(*a*) An. 1749.

duntaxat in ea correctione incommodi supererat, ut scalae constructio, quam Vir Cl. exhibuit non admodum facilis, & expedita videretur, & thermometri comparationem perpetuo postularet. Cum itaque de eo etiam incommodo tollendo cogitarem, Cl. de la Grange ea de re collocutus sum, qui unica observatione problema hoc ita absoluit, ut nihil in hac re desiderari amplius posse videatur. Inquiebat enim incrementum altitudinis mercurii ex dato caloris gradu natum esse, ut altitudinem columnae mercurii, quae ei calori exponeretur, ac proinde si barometra ex unico inflexo tubo conficerentur, ita ut in crure altero mercurii altitudo unius tantum, aut duorum pollicum esset, rarefactionem mercurii, & condensationem in eo crure tam exiguam altitudinis differentiam esse effecturam, ut negligi tuto posset; nil igitur aliud esse faciendum, nisi ut scala altitudinum breviori barometri cruri apponeretur; sic enim ascensus, ac descensus, ex mutata aëris gravitate natos aequae percipi, interea dum mutationes ex calore productae sensibilem errorem non parerent.

2. Cum porro quantum mercurius in uno crure adscendit, tantundem in altero descendat, & contra, variatio altitudinis mercurii supra libellam dupla est spatio a mercurio descendendo, vel adscendendo percurso: quapropter ut scala veram altitudinem supra libellam significet in hac loco pollicum semipollices, linearum loco semilineae ponendae sunt, & pro integris pollicibus, ac lineis integris deinceps assumendae; inde autem constat in hac barometri specie errores a rarefactione natos duplos esse ipsa rarefactione.

3. Quod si igitur quis paullo acurior, & diligentior errorem quoque ex minoris cruris rarefactione natum (1) declinare cupiat, in promptu correctio est ab eodem fonte petita: si enim binae scalae construantur, quarum una barometro ipsi apponatur, altera breviori barometri cruri, ira

ita ut haec adscendendo imminuatur, illa adaugeatur, quamdiu mercurius in eadem densitate perseverabit, utraque scala eundem gradum ostendet, mutata vero densitate, diversi gradus prodibunt, quorum semidifferentia totius voluminis incrementum, vel decrementum significabit. Poterit autem in scalis aptandis certa, & determinata mercurii densitas assumi, quod nos in nostris barometris parandis praestitimus: tubo enim cartaceo totum barometrum inclusimus, & comminuta glacie intervallum replevimus, ut in utroque crure congelationis frigore mercurius condensaretur. Deinceps mercurii altitudinem in utroque crure filo notavimus, & differentia altitudinum inventa, ad utrumque crus opportunam scalam aptavimus, quae eam differentiam exprimeret (1).

4. Similibus peractis spatium a mercurio congelationis tempore occupatum, quod aequale est longitudini cylindri intra cognomines quoscumque utriusque scalae gradus intercepti, semel dimetiendum est; huic enim si addatur, tota mercurii rarefactio (3) habebitur, quocumque tempore volumen mercurii rarefacti.

5. Porro altitudo mercurii in minori crure est minor vera dupla quantitate rarefactionis (2) in eodem crure; rarefactio autem tota aequatur summae duplae rarefactionis in minori crure, & rarefactionis mercurii supra libellam existentis: quare si altitudini minoris cruris addatur rarefactio tota, habebitur altitudo vera aucta rarefactione mercurii supra libellam existentis, seu aucta sua rarefactione.

6. Quare si fiat, ut volumen totius mercurii rarefacti ad volumen ejusdem condensati (4) ita altitudo mercurii rarefacti supra libellam (5) ad quartam proportionalem, haec dabit veram mercurii altitudinem (b).

C

7. Haec

(b) Scalearum constructio ea est, ut gradus in inferiori descendant, dum in superiori ascendant, quo fit, ut extremitates columnae mercurii fri-

7. Haec autem correctio tum accuratioribus, ut diximus, satisfacere potest, tum usui esse, quando mercurius descendit per insignem altitudinem, & propterea rarefactio minoris cruris insigniter augetur, quod in altissimorum montium altitudine barometri ope dimetienda fere contingit, quando correctionis usus in primis necessarius videtur ob frigus in montibus magis, magisque plerumque adauctum, prout loci altitudo adaugetur. Coeterum cum ascensus mercurii in minori crure, ex maxima atmosphaerae mutatione sit unius pollicis cum dimidio, si minima mercurii altitudo in eodem crure ponatur semipollicis, erit altitudo maxima duorum pollicum, atque adeo ejus rarefactio erit $\frac{1}{11}$ circiter rarefactionis in crure majore, & altitudo ab ipso crure notata pro vera assumi plerumque poterit absque sensibili errore.

8. Hoc

gore glaciali condensati semper ad gradus cognomines pertingant, qui gradus expriment altitudinem ejusdem mercurii condensati supra libellam; sit itaque in hoc mercurii statu numerus graduum, quem utraque scala quocumque dato tempore exhibet, $= r$, & immutato atmosphaerae pondere ponamus mercurium subito rarefieri evidens, est quantitates materiae in unaquaque columna easdem remanere debere, dum ejusdem volumina per spacia quaevis augebuntur. Exprimantur haec columnarum incrementa per m , & n , & quoniam mensurae graduum in scalis dimidia tantum sunt verarum, prodibunt in scala superiori gradus $r + 2m$, & in inferiori $r - 2n$; hi sunt gradus, qui ex immediata observatione semper habentur. Sit itaque numerus graduum in scala superiori a mercurio notatus $= a$, & numerus graduum respondens in inferiori $= b$, & erit $r + 2m = a$; $r - 2n = b$ subtrahatur haec aequatio ab illa, & residuo per 2 diviso exurget $m + n = \frac{a-b}{2}$; quae adeo erit aequalis rarefactioni totali. Addantur nunc ambae aequationes, & summis per 2 divisus habebimus $\frac{a+b}{2} = r + m - n$, quae formula, ut videre est exhibet volumen primum mercurii supra libellam, cum sua rarefactione, quae aequatur differentiae rarefactionum ambarum columnarum. Si itaque c sit longitudo totius cylindri mercurialis frigore condensati; sequentem analogiam poterimus instituere $c + \frac{a-b}{2} : c = \frac{a+b}{2} : \frac{ca+cb}{2c+a-b}$, quae quarta proportionalis exhibebit quocumque tempore altitudinem mercurii supra libellam ad eundem scilicet per condensationis statum redacti.

3. Hoc porro barometrum quanquam duplo minus sensibile sit, quam reliqua, plures tamen utilitates complectitur, quod nec scalam mobilem postulet, nec obnoxium sit depreffioni ex tuborum angustia natae, nec demum ob caloris, frigorisque vicissitudines, in errorem inducat.

DE FALLACIA METHODI DIMETIENDI QUANTITATEM ATTRACTIONIS.

Inquisturus, num aliqua, & quanta mercurium inter, & vitrum adhaesio intercederet, utebar methodo a Taylora, aliisque tradita, ex altero nempe bilancis brachio vitrum planum suspendebam in situ orizontali, & apposito in altero brachio aequipondio, suppositoque mercurio, vitri inferiorem superficiem mercurii superficiei aptabam, & ex pondere in altero bilancis brachio addendo ad vitrum e mercurio divellendum adhaesionis vim metiebar, cumque non exiguum pondus ad id requiri experirer, maximam mercurium inter, & vitrum adhaesionem ea methodo me invenisse, ac demonstrasse existimabam. Fallacem methodum esse amice monebat Ludovicus de la Grange, eamque adhaesionem externi aëris pressioni aut totam, aut ex parte esse adscribendam, cumque responsionis loco nihil suppeteret, quod afferrem, nisi Cl. Virorum auctoritatem, qui ea methodo eodem scopo saepe usi fuerant, ad experimentum provocabat inter corpora, inter quae nullam adhaesionem esse, apud Physicos in confesso esset. Itaque unanimes id ipsum experimentum vitre oleo madido, subiecta aqua tentavimus, sed magnum quoque pondus ad id vitrum ab aqua divellendum necessarium fuisse invenimus; observabamus duntaxat, majus, minusve pondus requiri, prout contactus magis, minusve esset accuratus, prout nempe plures, paucioresve aëris bullae vitrum inter, & aquam essent interpositae. Cum autem in eo experimento

veri liceret, ne olei stratum minus crassum esset, quam ut sufficere posset vitri, & aquae adhaesioni prohibendae aliud in hanc rem libuit instituere. Nempe vitrum operuimus sebi strato ultra semilineam crasso, & nihilominus idem fuit experimenti exitus, ex quo constitit novem, & ultra unciarum pondus necessarium fuisse ad superficies 10. circiter pollicum quadratorum divellendas. Sebum porro omnem aquae ad vitrum adhaesionem impedire Physici consentiunt, & demonstrat experimentum, quo tubi capillares intus sebo inuncti aquam supra libellam suspensam non retinent, observante Sigornio, ex quibus conficitur eam methodum a Physicis adhibitam, veram adhaesionis mensuram non praebere.

DE ASCENSU, ET DESCENSU THERMOMETRORUM VARIIS LIQUORIBUS MADENTIUM EX INFLATO VENTO.

Thermometra humida, si vento ejusdem temperaturae perflectentur, aut si ventus ipse humidus sit, insigniter deprimi Musschenbroeckius scribit (a), quod porro phaenomenon cum singulare videretur, libuit variis liquoribus rem eandem tentare. Talis autem fuit experimentorum exitus.

Aqua, vini spiritus, acetum, lac, cremor lactis thermometer descensum praestabant; petroleum, essentia caryophyllorum, oleum olivarum, oleum lini adscensum efficiebant, ac demum oleum Tartari per deliquium ad aëris temperaturam reductum nihil mutabar, adeout, inflato aëre, thermometer immobile permaneret. Ut autem certiores fieri possemus, num revera ex vento thermometer adscenderet, aut descenderet, si de iis liquoribus quaestio erat, qui adscensum faciebant, iisdem frigidioribus utebamur,

(a) Essai de Physique §. 962.

mur, quam eo tempore atmosphaera esset; sic enim inflato vento prius ad atmosphaerae calorem assurgebat thermometer, dein flatu continuato majorem altitudinem assequebatur, & postea in aëre relictum ad atmosphaerae temperaturam redibat, ac demum si in eum liquorem immergeretur, iterum descendebat. Contra autem, quando de liquoribus agebatur, qui descensum facerent, eosdem calidiores parabamus, quam atmosphaera esset, ut pariter venti effectum exploratum, certumque haberemus.

Recensita porro experimenta nulli haëtenus cognitae ignis, calorisve proprietati accommodari posse videntur. Si enim dicas, vi salium in aëre contentorum, liquores, quibus thermometra madent, refrigerari, aut incalescere, qui vero sit, ut oleum tartari, quod maximam cum acidis per atmosphaeram diffusis effervescentiam efficere, maximum inde calorem producere deberet, nec minimum pariat caloris, aut frigoris gradum? Sin vero ad attritum confugas aërem inter, & liquores, quibus aspersa thermometra sunt, primo quis dixerit ex aquae, & aquosorum humorum attritu frigus produci? deinde vero haëtenus in ea theoria illud firmum, ratumque habitum est, quod calor non solum attritui respondeat, verum etiam liquorum indoli plus, minusve pinguium, atque adeo magis, minusve inflammabilium, a qua quidem lege nostra experimenta longissime absunt. Quid enim macrius oleo tartari? quid vini spiritu inflammabilius? quid pinguius lactis cremore? veruntamen oleo tartari nullum frigus gigni, ingens ex vini spiritu, & cremore lactis oriri, ipsa experimenta constantissime docuerunt.

Nobis igitur rem ipsam proposuisse suffecerit; rei causam diligentioribus investigandam relinquemus, forte etiam nos ipsi aliquando proponemus; experimenta enim aliqua inchoavimus, quae si eundem eventum constanter habeant, ad hanc, aliasque caloris, frigorisque causas assequendas conducere possunt.

DE.

DE CAUSSA EXTINCTIONIS FLAMMAE IN CLAUSO AERE.

1. **C**UM Eques Salutius definire studeret, num elastici cum fluidum a pulvere pyrio erumpens alendae flammae aptum esset; quaestio exorta est cur clauso in spatio flamma diu vivere nequeat, eaque occasione variae Physicorum de hac re sententiae in medium prolatae sunt, ut si fieri posset, potissimam, ac veritati proximam assequeremur.

2. Inter caeteras celebris illa adducebatur, qua flammae extinctio vaporibus haeterogeneis tribuitur ab ipsa erumpentibus, quibus inclusus aër absorbeatur, aut ejus elasticitas destruat, unde is, qui residuus est minorem elasticitatem exercent, quam sustentanda flamma postularet (a). Hanc vero non levibus difficultatibus obnoxiam esse proponebam, cum vix ad aliquot pollices elevato mercurio clauso in spatio flamma extinguatur (b), etsi in montibus, ubi longe rarior aër existit, quam commode vivat; quod si a vaporibus, ac fuligine flamma exstingueretur alcoholis flammam diutissime clauso in spatio victuram esse colligebam, cum ab eadem fuligo nulla emanet, nec nisi aquei vapores aliqui erumpant (c): quoniam vero diversus fuit experimenti exitus, & alcoholis flamma citius quam sebi,

(a) L'on ne doit pas attribuer à la perte de l'esprit vital de l'air l'extinction de la flamme de la chandelle, & des méches sous des récipients, mais aux vapeurs fuligineuses, & acides, dont l'air se charge, & qui détruisant l'élasticité de cet air, empêchent, & retardent l'action, & le mouvement élastique du reste. Statiq. des vegetaux exp. 117. p. 223.

(b) Post absorptam $\frac{1}{37}$ aëris flammam extingui Mayovv, post absorptum $\frac{2}{37}$ Halesius tradit l. c. exp. 106. p. 200. 201. : imo, ne uno quidem pollice elevato mercurio, flammam extinctam fuisse ipse Halesius tradit l. c. exp. 125. p. 223. 224.

(c) Boerrhauv. elem. chem. t. 1. p. 170. 171. edit. parif.

sebi, aut pinguis olei extincta est, mea exinde magis dubitatio augebatur (*d*).

3. Interea Ludovicus de la Grange experimento alio prioris opinionis infirmitatem evincebat. Accensam scilicet candelam ita vitreae campanae supposuit, ut campana ipsa spatium non clauderet, sed ejus inferior limbus a tabula, cui candela insisteret, aliquot transversos digitos distaret, at flammam non minus perire observavit; quanquam amplissimus externo aëri sub campanam aditus pateret, quare nobis etiam apertius persuadebatur ex defectu aëris, aut ejusdem absorptione clausam flammam non extinguui.

4. Cum id Vir industrius observasset, explorare insuper coepimus, num intra recipiens in suprema parte amplo foramine pertusum flamma vivere posset, sed similiter exringui experti sumus: Jam igitur binos in suprema parte hiatus experiri libuit, quos similiter sustentandae flammae ineptos esse comperimus, tum vero observavimus foramina non majora flammam servare, si alterum in suprema recipientis parte, alterum in infima pateret, cumque varias apertionum positiones, variasque earundem combinationes Ludovicus de la Grange similiter tentandas proposuisset, ad id Eques Salutius lanternam ex albo ferro construendam curavit, quæ undique accurate clausa erat; sed duobus in suprema parte foraminibus hiabat, duobus in media, totidem in infima, quorum unumquodque pollicem circiter diametro patebat, & subere obturari pro lubitu poterat.

5. Hac usi, observavimus bina ostia superiora, aut media, aut infima sustentandae flammae non sufficere, sufficere

au-

(*d*) Deinceps cum Boylei opera pervolverem haec jam olim ab eximio Physico animadversa fuisse comperi, qui cum alcoholis flammam clauso in spatio extinctam fuisse narasset, haec adlit post flammae extinctionem aër in recipiente alteratus visibiliter non fuit, & quantum ex judicandi modis, qui ad manum tunc erant percipere potui, aër, vel omnem suam elasticitatem, vel saltem longe maximam ejus partem retinebat. Vid. ejus suspici de latent. aëris qualitat. tom. 2. p. 8. edit. Geney. 1699.

autem duo alia quaevis, si modo eorum unum supra flammam, alterum infra ipsam situm esset; quinimo unicum ad basim lanternae sufficere Eques Salutius demonstravit, si ita lanterna agitaretur, ut modo superiora, modo inferiora flamma teneret.

6. Ex quibus experimentis cum constare videretur per foramen alterum, & quidem per inferius ingressuro aëri, per alterum, & quidem per superius eidem egressuro aditum liberum esse oportere, ut flamma sustentaretur, eam tamen aëris per foramina directionem levibus corporibus admotis de la Grange tutius, certiusque definire cupiebat.

7. Id facilius appositis valvulis perfici posse animadverti, & quidem observavimus ex tali valvularum dispositione; ut per superius foramen aër egredi, per inferius ingredi posset, flammam vivam mansisse, ex opposita ipsarum directione interiisse, ita ut in primo casu valvulae a foraminum margine sponte recederent, in postremo contra eundem aptarentur.

8. Quum igitur id constitisset, per inferius foramen ingredi, per superius egredi aërem debere, ut flammam sustentare posset, experiri volui, num tubo curvo communicationem inter superius, inferiusque foramen perficiente flamma intra clausum spatium servari posset; sed nihilo secius extingui observavi, quam si nulla huiusmodi communicatio intercessisset.

9. Halesius porro crus alterum syphonis per apertum excipuli pneumatici verticem ita trajecit, ut ad lancis fere contactum perveniret, ejusque cruris orificium tribus laneis tegumentis munivit: candela sub eo recipiente posita intra pauca minuta extinguebatur, quanquam tunc temporis Halesius aërem exantlando renovaret; nam per lanea syphonis tegumenta libere adeo externus aër in exantlati locum penetrabat, ut mercurii altitudo, ne uno quidem pollice augetur (c).

10. Experimentum hoc, cum de la Grange perpenderet, ideo flammam extinctam fuisse opinabatur, quod aër in inferiori tantum recipientis parte renovaretur, dum is, qui in superiori continebatur, immotus remaneret: victuram itaque flammam sperabat, si a superiori recipientis parte aër hauriretur, novusque aër in subducti locum per lancis foramen ingredi posset, sic enim talem aëris cursum produci, qualis a flamma libero in aëre excitari solet (7).

11. Aptabat itaque ad lancis foramen, quod in antliam patet tubum ejus longitudinis, ut ad superiorem recipientis partem perveniret, & flammam ita sub recipiens collocabat, ut foramen aliud lancis, per quod barometrum traduci solet, intra recipientis ejusdem ambitum comprehenderetur, & externo aëri in recipiens aditum praeberet: his ita paratis, etiamsi epistomium machinae pneumaticae apertum esset, & binis foraminibus, superiori altero, altero inferiori cum externo aëre recipiens communicaret, candela brevi exinguebatur.

12. Quod si aërem ex suprema parte per tubum hauriret, novusque interim aër per lancis foramen in inferiorem penetraret, flamma servabatur, & tandiu quidem, quamdiu emboli motus perseverabat, ex quibus constitit foramina, quae servandae flammae inepta sint (11), servare utique posse, si cursus aëris ab inferiori ad superius foramen ex arte producat.

13. Quandoquidem, ut dictum est, (8) tubus, qui communicationem inter superius, inferiusque foramen efficiebat, flammam non servaverat, conjecturam fecit de la Grange intra vas clausum aëris circulum sponte perfici non posse, qui si ex arte excitaretur, fortasse non aliter flammam, quam in praecedenti experimento sustentaret. Ut id experimento decerneret curvum vitreum tubum ex eo foramine, quo antlia pneumatica cum externo aëre commercium habet ad supremam apertam recipientis pneumatici

D

par-

partem deduxit, accurateque glutinavit, & accensam candelam sub recipiente inclusit, cumque mox extinctioni proxima esset, embolum agitavit, epistomium ita versando, ut educto embolo aërem per tubum ex suprema recipientis parte exurgeret, eodemque restituto per lancis foramen in inferiorem urgeret: tum vero observavimus singulis emboli agitationibus refocillari flammam, sensimque haud minus vividam reddi, quam in aperto aëre futura fuisset; ac talem tandiu servari, quamdiu motus emboli perduraret, eodem cessante paulatim languere, iterumque extinctioni proximam eadem arte restauravi; hasque languoris, vigorisque vicissitudines induci pro lubitu posse; quod si emboli motus per aliquot secunda deficeret, extinguebatur. In hoc autem experimento tentando, prius embolum agitari oportebat, quam omnia accurate glutinata essent, ne praepropere flamma interiret, & barometrum aptare negleximus, quod nos certiores redderet, num omnis externo aëri aditus interclusus esset, sed rei novitate, & elegantia delectati, statim de commodiori experimenti specie cogitavimus, quae vitae usibus inserviret.

14. Id autem obtineri posse animadvertimus, si recipiens undique accuratissime clausum foramine uno in suprema parte, altero in infima pertunderetur, hisque valvulae ea lege aptarentur, ut superior erumpenti aëri cederet, irruenti resisteret, inferior vicissim in recipiens aditum praeberet, regressum interciperet, quibus ita comparatis per curvum canalem ad recipiens feruminatum communicatio inducetur inter utrumque foramen, ipsoque demum pertuso canali, ad aperturam follis tubus accommodaretur; sic enim dilatato folle aërem ex superiori recipientis parte tantum hauriri, eodem compresso in inferiorem ejusdem partem urgeri, talemque aëris circulum produci, qualem clauso in spatio flamma sustentanda postulabat (13).

15. Lanterna itaque ex albo ferro exposita arte constructa fuit, quae anteriori in parte plano vitro ad ferrum quam exacte ferruminato, ac glutinato clauderetur, ut ipsius cavitas conspici posset. Lanternae porro fundus rotundo foramine pertusus erat, quod in tubum aliquot pollices longum supra internam fundi faciem normaliter junctum aperiebatur. Tubus alius planae laminae normaliter insistenti priori congruebat, & accensam candelam recipere poterat, ac sustinere: superior autem planae laminae facies molli cera obducebatur, sic enim tubo hoc in priorem immisso, candela in lanternam insinuabatur, & interea plana basis superiori facie, qua cera obducta fuerat, contra lanternae fundum compressa, eidem adhaerebat, & exterioris aëris ingressum prohibebat. Reliqua se habebant, ut §. praecedente propositum fuerat: duntaxat notandum follis, quo usi fuimus, posteriorem aperturam, superposito corio, ac rite glutinato obrutam fuisse: his ita dispositis experimentum aggressi fuimus, quod expectationi nostrae respondit; candelam enim mediocrem, quae intra recipiens sibi relicta minuto temporis extinguebatur, tamdiu vivam servabamus, quamdiu follem agitare lubebat, & intermissa paulisper agitatione languidam cernebamus, quae mox, eadem renovata, restaurabatur.

16. Et si vero lanternam accurate clausam optaremus, talem nihilominus ab artifice non obtinuimus, sed singulis follis agitationibus aëris irruentis, aut prodeuntis sibilum percipiebamus, inprimisque citra vitrum, tumque ex follis agitatione flamma vehementer commota extinguebatur, praesertim si paullo celerius follis agigaretur: postquam vero pleraeque lanternae juncturas superinducta cera, & mastice glutinavimus, descriptum lanternae effectum demum obtinuimus; quapropter in nostra opinione fuimus confirmati non ex renovatione, sed ex circumductione aëris flammam

servari, siquidem quo accuratius novus aër arcebatur, eo magis quieta, & incolumis apparebat.

17. Interim non inopportuno existimamus ea afferre, quae Cl. P. Beccaria in suis physices lectionibus in hanc rem protulerat, ea autem hujusmodi sunt.

„ Primo flammam ex charta excita sub flamma candelae :
 „ extinguitur; ea enim aërem disjiciens infra candelae flam-
 „ mam constitutum, facit, ne aëre undique ambiente flam-
 „ ma candelae libretur, contineatur.

„ 2. Candelam accensam supponito vasi undique clauso;
 „ brevi extinguitur; supponito vasi clauso undique, quod
 „ tamen prope fundum communicet cum aëre ambiente :
 „ extinguitur.

„ 3. Supponito vasi undique clauso, praeter quam in
 „ vertice, ubi foramen hiet pollicare : extinguitur.

„ 4. Supponito vasi, in quo foramen pollicare duplex, al-
 „ terum basi flammae depressius, alterum altius : vivet
 „ flamma, atque non verticali emicabit directione, sed
 „ obliqua, apice nimirum suo declinabit a loco foraminis
 „ depressioris in locum foraminis altioris patentis in latere
 „ opposito vasis.

„ Quae omnia non solum probant aërem esse neces-
 „ sarium, qui flammam reverberet undique ad flammam
 „ alendam, sed plane etiam evincunt aëre opus esse, qui
 „ certa circumeat lege; flamma nimirum suo apice immi-
 „ nentem sibi aërem perpetuo deturbat, illi aër succedit,
 „ qui basi flammae adjacet; novo ergo aëre continenter
 „ opus, qui adfluat ad basim, dimotoque ex apice aëri
 „ succurrat.

„ Ratio ipsa, qua servatur ignis in prunis accensis, vel
 „ ratio potius, qua fit, ne ignis in prunis accensis grassans,
 „ ipsas velociter exolvat in cineres, eandem confirmat,
 „ quam superius constitui veritatem; nimirum cineribus
 „ obvolvuntur accensae prunae, ea res facit ne recens con-

„ tinuo

„ tinuo aër revèrberet ignis particulas, prunasque adeo fer-
 „ vat diutius. „ Hactenus Vir Clarissimus. Quid vero de
 hisce sentiendum videatur ex sequentibus apparebit.

18. Postquam quae tentavimus de flamma experimenta
 in eum qualemcumque ordinem redegissem, quo proposita
 leguntur, Eques Salutius nova instituere aggressus est: in-
 vestigare nimirum voluit num aëris fluxus, qui ab inferiori
 ad supremam clausi recipientis partem dirigeretur, flammam
 quoque sustentaret, etsi hujusmodi directio, directioni, quam
 aër circa flammam sponte sequitur, opposita esset.

Itaque siphones binos ex vitro selegit, quorum crus al-
 terum intra clausum recipiens insinuavit, dum alterum extra
 ipsum emergebat: inclusa crura non eandem habebant al-
 titudinem, sed unum supra flammam eminebat, alterum
 infra ipsam deprimebatur: ex hoc aërem ore exhantlari,
 jussit, atque ejusmodi exhantlationibus flammam vivam ser-
 vari observavit, quanquam aër ex infimo siphone eductus
 nonnisi ab aëre per supremum siphonem irruente reparari
 posset, sicque a superiori ad inferiorem siphonem aëris
 cursus dirigeretur. Cessante exsuctione flamma extingueba-
 tur, quemadmodum juxta §. 11. contingere debebat: jam
 vero binos siphones adhibuit, quorum inclusa crura, vel
 utraque supra flammam eminebant, vel utraque eadem
 depressoires existerant, & in utroque casu, hausto ex altero
 siphone aëre, flammam vixisseprehendit.

19. Haec autem experimenta eo magis paradoxa nobis
 videbantur, quod postremum Halesii experimento superius
 descripto (9) oppositum esset; itaque tum caetera experi-
 menta, tum imprimis hoc ipsum non semel, aut iterum,
 sed saepius omni diligentia, ac sollicitudine instituimus,
 cumque eventus idem constantissime se proderet, suspicari
 fumum Halesium ampliori; altiorique recipiente usum fuisse,
 adeo ut fluxus aëris ab uno ad alterum inferiorum for-
 aminum absolveretur, intereaque aër superior, qui flammam
 cir-

circumdaret, immotus remaneret, vel eundem Halesium sero nimis embolum agitalle, flamma jam languida facta, vel demum majori, minorive, quam par esset, celeritate embolum commovisse, eo vel maxime, quod ex postremis hisce causis, flammam in nostris experimentis non semel extinguere contigisset.

20. Neque solum alienis experimentis, verum etiam nostris, & praeconceptae theoriae mox proposita experimenta adversari videbantur: nam ex illis conficiebatur, vel quaecumque aëris motum, & agitationem flammae servandae aptam esse, vel flammae vitam non ab aëris motu, sed ab ejus renovatione repetendam esse. Itaque unum, eundemque inclusum aërem agitare primum coepimus, ut videremus, num agitatio aëris, quae ipsius renovationem nullam producat, flammae servandae sufficeret; si enim secus contingeret, concludendum erat motum aëris non per se ipsum flammam servare, sed quatenus per motum continua aëris mutatio perficeretur: cum vero aëris varia agitatione flamma sustentari non potuisset, tunc eo magis dubitavimus, etiam in proposita machina (15) flammam vixisse ob aëris renovationem potius, quam ob ipsius circuitum certa lege, certaue directione excitatum: dilatato enim folle, si aliquod vel minimum in machina foramen remaneret, tantum aëris per ipsum in machinae cavitatem penetrare oportebat, quantum aucta erat aperti folliis capacitas, eodemque constricto, aequalis aëris quantitas per idem foramen iterum erat expellenda, eaque ratione aër renovari potuisset.

21. Experimentum quidem in machina pneumatica primum fuerat institutum, sed cum nullum barometrum fuisset appositum, quo certi essemus externum aërem prohibitum fuisse (13), ideo illud experimentum appposito siphone iterandum esse censuimus; cum vero ea methodus incommoda esset ob multiplices juncturas, quae promte pro quovis expe-

experimento erant perficiendae, commodiorem apparatus Eques Salutius exhibuit: binos scilicet tubos vitreos binis machinae pneumaticae foraminibus, per quorum alterum aër hauriri, per alterum expelli solet, firmiter glutinavit, qui quidem tubi ab illis foraminibus discendentes, ita proredebantur, ut ad vas aquam continens pervenirent, ibi flexi normaliter erigebantur, ita ut alterum aliquot transversos digitos supra aquae superficiem aperiretur, alterum multo altius defineret: tuborum aperturae conis cartaceis tegebantur, ut aëris introeuntis, aut prodeuntis impetus frangeretur, ex quo vicina flamma extingui potuisset: deinde inter binos tuborum ramos in eodem vase accensa candela collocabatur, cujus flamma altero tubo depressior, altero elatior erat, & medium fere inter ipsorum altitudinem locum tenebat: postremo tubi aqua immersi, & candela simul, campana vitrea tegebantur, cujus limbus aliquot transversos digitos infra aquae superficiem demergebatur, eoque pacto aqua omnem externo aëri in campanam aditum intercludebat. Agitato autem embolo, ut per altioris tubi ostium aër exsugeretur, & mox per inferioris orificium iterum propelleretur, alterne aqua intra campanam ascendebat; ac descendebat, qui quidem aquae alterni motus externum aërem excludi significabant; at vero deprae-hendimus candelam ex tali aëris ab inferioribus ad superiora circuitu, servari non potuisse, & ex contraria aëris directione non magis sustentari; quin imo ejus vita ex hujusmodi aëris circuitibus, non magis durare visa est, quam si aërem immotum relinqueremus: quando autem aquae copia minor in vase erat, adeo ut educto embolo trans ipsam bullarum specie externus aër in campanam insinuari, & eodem restituto eadem via expelli posset, tunc utique flammam servari observavimus, ex quibus intelleximus in machina superius descripta (15), non certa aëris directione, sed ejusdem renovatione flammam sustentatam fuisse

(c);

(e); ex aperturis citra vitrum aequè periisse (16), non quod externus aër admitteretur, sed quod directe nimis aëris unda in flammam irrueret.

22. Neque vero difficile est intelligere, cur per bina foramina, quae verticalia non sint, aut in apparatu §. 11., & 18., aut demum in nostra machina, aër sponte non renovaretur; nam aër ex flamma rarefactus, ac specificè levior a graviore aëre circumposito ad superiora impellitur, nec nisi ea directione e lanterna prodire potest; ut autem expellatur necesse est externum aërem, & quidem per inferius foramen, eidem succedere; nam si externo aëri per superiora tantum foramina aditus pateat, is suo nisu rarefactum aërem, qui contraria directione prodire conatur, intra lanternam coercet, nisi tanta fuerit superiorum foraminum amplitudo, ut ingressuro, & egressuro aëri eodem tempore transmittendo sufficiant, quo in casu per ea sola foramina aër renovari poterit, & flamma servari: & hanc quidem theoriam experimento alio de la Grange confirmat (4); nam lanternae ostio inferiori patente, ad ostium superius tubum curvum accommodat, qui si sursum vergit, flammam servat, si deorsum, eandem suffocat, quod scilicet sursum vergens, aëri rarefacto, & ad superiora tendenti aditum praebeat, deorsum directus, aëris rarefacti directioni opponatur, eundemque intra lanternam coercet. Ex his etiam deducitur, in experimento Equitis Salutii, unico foramine flammam vixisse, non quod foramen superiora modo, modo inferiora teneret (5), sed quod ex agitatione per unicum etiam foramen aër renovaretur, qui, lanterna quiescente, renovari non potuisset.

23. Id igitur commodi habet proposita machina, ut aërem renovet, quando sponte non renovaretur, adeoque iis in locis flammae sustentandae inservire poterit, ubi ob loci

figu-

- (e) Jam aliqua talis machinae species apud Boyleum extabat (nov. exper. de relat. inter flammam, & aërem exp. 4. p. 21.), qui folli communi, & in posteriori parte aperto ad renovandum aërem utebatur.

figuram aër circa flammam sponte renovari non potest, quae ob eam causam cito suffocatur. Quum vero ea renovatio per quaevis minima foramina eo pacto perfici possit, per quae ignis scintillae transmitti nequeunt, machinam eandem utilem esse posse censemus, si quando nocturno tempore pulvis pyrius conficiendus, aut aliquo modo pertractandus sit, cum omni incendii periculo vacet: in ea autem machina valvulas supervacaneas fuisse posteriora experimenta (18, & seq.) demonstrarunt. Et priorem quidem theoriam (15, 16) minus accuratis experimentis (13) innixam missam fecissemus, nisi ejus fama evulgata fuisset. Nostrium igitur esse duximus magnorum virorum exemplo candide rem totam profiteri, eoque libentius id fecimus, ut ostenderemus Cl. Viris, quorum sententias alicubi minus probavimus, nos non contradicendi studio, sed veritatis amore in id adductos fuisse, cum eandem nos in emendandis opinionibus nostris severitatem, quam in aliorum sententiis perpendendis adhibuerimus.

24 Postquam solum aëris circuitum flammae servandae ineptum esse comperimus, tela lanea oleo tartari imbuta tuborum orificium Eques Salutius munivit, ut aër per illam trajectus a vaporibus expurgari posset; Halesii, ut ita dicam, conjectura excitatus (f), veruntamen flamma cito interibat. His non contentus superius aperti recipientis ostium ampullae ventre replevit, & commissuras glutinavit, venter autem ex contenta aqua frigidus servabatur, eoque artificio aërem a flamma sub recipiente posita rarefactum, & admixtos vapores refrigerare, ac condensare contendebat, ut flammae vita produceretur; siquidem ex nimia ambientis aëris rarefactione, aut admixtis vaporibus interiret: sed hoc tentamen non minus inutile fuit, quam praecedens, idemque fuit eventus, quando *refrigeratorium*,

E

&

& filtrationem simul adhibuit, cum inde flammae duratio sensibiliter producta non fuerit.

25. Tum ego non per telam tantum liquore imbutam, sed per crassum diversorum liquorum stratum aërem flammae circumpositum crebro trajiciendum suasi, cum superioris experimenti (23, 24) apparatus opportunus esset, dummodo brevior alterius tubi ramus, per quem aër in recipiens restituitur, ad liquoris fere libellam frangeretur. Ita enim exhantlato aëre ex altiori ramo, sicque elevato liquore, brevioris rami aperturam liquore ipso tegi oportebat, & propterea aër per eam aperturam impulsus, in recipiens penetrare non potuisset, nisi per superpositum liquoris stratum bullarum specie permearet, qua traiectione non modo a vaporibus expurgari, sed & refrigerari, ac condensari debuisset: ad praeveniendam vero liquoris in brevioris immersum tubum, indeque in antliam pneumaticam irruptionem Eques Salutius ipsum non recta ex antlia in vas aquam continens deduci, sed in arcum flecti curaverat, qui continuus non erat, sed in suprema parte interposita phiala vitrea interruptus, ut in ipsam absorptus liquor proprio pondere deponeretur. His ita paratis aërem per aquam, per oleum, per nitri solutionem, per fortem solutionem salis tartari successive trajecimus, sed flammae recipienti inclusae vita haud sensibiliter inde protracta fuit.

26. Quoniam igitur constiterat non fumo, aut aquosis vaporibus (1, 24, 25), non absorpto aëri, aut destructae ejusdem elasticitati (3, 4), non ipsius rarefactioni, propter quam ad flammam circa elycnium coërcendam ineptus evadat (24, 25), flammae extinctionem clauso in spatio tribuendam esse, unica supererat hypothesis a Physicis proposita, quod scilicet flammae nutrimentum clauso in aëre contentum a flamma brevi absumatur. (g), & id quidem nutri-

men-

(g) Quae Boylei conjectura est in suspic. de latent. aër. qualit. p. 8, & Musscemb. Essai de Physiq. §. 979., & Laghii Commem. Bonon. t. 4. pag. 88.

mentum a nitrosis salibus per aërem diffusis in primis ortum ducat : quae hypothesis aliquam veri speciem praeferre videbatur, tum ex eo, quod caeteras reiiciendas esse experimenta demonstraverant, tum quod pingua corpora nitrata, ut pulvis pyrius, vel in vacuo boyleano flammam concipiant; sperabam igitur candelam diutius intra clausum spatium victuram, si nitro pulverato elycnium, & sebum inspergerentur, sed aequè cito extincta est. Eques vero Salurius rem eandem aliter tentavit. Nam campanae, qua flamma tegebatur, limbum, in nitri spiritum fumantem immerfit, ut inde erumpentes nitrosi spiritus per campanam dispersi flammam circumdarent, sed similiter flammam perire observavit, ac si aqua, vel liquor alius loco nitrosi spiritus campanae limbum obtegisset. Hypothesim itaque consumti pabuli perinde ac caeteras experientia edocti deferendam esse intelleximus.

17. Id nihilominus certum permanere videbatur aërem clauso in spatio ab inclusa flamma vitari, cum eandem diutius alere nequaquam posset, etsi quale huiusmodi vitium esset, detegi nondum potuisset: quapropter experiri volui, num aër, in quo flamma sponte extincta fuerat, alteram flammam injectam suffocaret; proinde sub campanam vitream dispositam ut §. 3. accensam candelam per inferiorem aperturam insinuabam, & postquam sponte extincta fuerat, accensam aliam per eandem aperturam immittebam: temporis momento suffocabatur, imo post aliquot minuta accensa candela immissa similiter peribat, ex quo confirmatur per unicam etiam amplam campanae aperturam aërem sponte non renovari (23); idque in causa esse cur intra ipsum flamma diu vivere non possit.

18. Cum itaque aërem flamma ita perverti observarem, ut post aliquot minuta temporis eandem indolem retineret flammae exitialem, inquirere praeterea constitui, an non longiori temporis intervallo, refrigerato aëre, & flam-

mae vaporibus ad latera excipuli subsidentibus, pristinam salubremque naturam aër ille recuperaret: quoniam vero aër intra campanam relictus, quae inferiore parte patebat (§. praec.), leviori quacunque vicinorum corporum agitatione sensim sensimque renovari potuisset, idcirco malui supra lancem metallicam duobus rotundis foraminibus perviam campanam eandem glutinare. Per alterum foraminum in lance patentium siphon vitreus mercurium continens ductus fuerat, & cera firmatus, per alterum accensa candela in recipiens insinuari poterat, & interim mollis cera, cui candela insistebat, foramen illud obturabat. Extincta itaque candela vidimus mercurium in siphone contentum adscendisse, ob condensationem scilicet aëris, qui a flamma fuerat rarefactus, forte etiam ob ejusdem absorptionem, & mercurii supra libellam suspensio per tredecim, & ultra horas perduravit, quod nos certiores fecit toto eo tempore exteriori aëri in recipiens aditum denegatum fuisse, proinde aërem renovari non potuisse. Eo transacto tempore, imo & multo antea recipientis cavitas limpida facta fuerat, & ad latera vitri ros fuerat depositus ex fumis, vaporibusque extinctae candellae in liquorem condensatis. Tum igitur candelam prius extinctam, quae obturaculi instar erat, leniter eduxi, ne aër recipiente contentus commoveretur, & accensam aliam per id foramen in recipiens insinuavi. Vix flamma intra recipiens penetraverat, cum repente exinguebatur, perinde ac si in aquam immergeretur (h). Quod cum ostenderet aërem flamma vitiatum diu id vitium retinere, confirmare videbatur ejusmodi vitium, neque calori,

(h) Halesius accensam candelam sub recipiente positam, in quo alia mox extincta fuerat, non statim suffocari observavit, sed $\frac{1}{2}$ temporis perdurare, quo prior candela vixerat (pag. 202.). Veruntamen id evenisse videtur, quod Auctor recipiens e loco-movere, & ab aqua, in quam immersum erat, eximere debuerit, ut accensam candelam illi substitueret, quae mox fuerat extincta, illisque commotionibus recipientis aërem ex parte ita renovaverit, ut flamma aliquamdiu vivere potuerit.

lori, qui jam dudum dissipatus fuerat, neque vaporum mixtioni, qui condensari subsederant, esse adscribendum.

29. Postquam comperissem, aërem per flammam traductum, flammae alendae imparem effici, in lanterna, quam descripsi §. 4., duo tantum verticalia foramina aperta relinquebam, & accensa candela intra ipsam inclusa, superiori foramini flammam admovebam; extinguebatur. Aër scilicet ab inferiori foramine ad superius movetur (7); propterea flamma superiori foramini admota aërem recipit per flammam lanternae trajectum, qui prava sua qualitate eandem suffocat (§. praec.).

30. Quod si inferiori foramini flammam admovebam, candela lanternae inclusa extinguebatur; quod nempe aër per inferius foramen in lanternam penetrans (7), per admotam flammam trajici cogeretur, a qua ita mutabatur, ut lanternae flammam servare non posset; extinguebatur autem sive adposita candela ex sebo esset, lanternae vero inclusa ex cera, sive contra; sive utraque ex sebo esset, sive utraque ex cera, sive aequales, & aequali elyncio praeditae essent, sive alterutra major, majorique elyncio praedita esset. Qua propter cum nec alimenti qualitas, nec elyncii magnitudo experimenti exitum immutaverit, videtur aërem per flammam unam trajectum alteri cuicumque alendae aequae ineptum evadere.

31. Quum autem animadverterem, non flammam solum, sed & accensos carbones (i) clauso in spatio suffocari, utriusque phaenomeni eandem causam esse ratus, ad inferius lanternae foramen ardentem prunam ita admovebam, ut ab ipso foramine non nihil distaret, & liberum aëri intra lanternam aditum relinqueret; flamma tamen lanternae inclusa suffocabatur; quod si prunam lanternae includerem, & ad superius lanternae ostium flammam admovebam, haec protinus extinguebatur.

32. Hauksbejus porro fuerat expertus, aërem per candentia, metalla trajectum, & intra recipiens collectum, flammæ exitiale fuisse. Hac autem methodo præstantissimus Physicus usus est (K). Recipiens amplum selegit in superiori parte apertum, cujus apertura lamina cuprea, & interposito molli corio, accurate claudebatur; ex parvo foramine in lamina cuprea aperto tubus erigebatur auricalceus, clavi versatili munitus, ut communicatio inter recipiens, & tubum pro opportunitate induci, vel. tolli posset: tubi extremitas opposita in cavitatem crassæ mollis cupri insinuabatur, ita tamen, ut inter tubum, & illius massæ cavitatem aër penetrare posset; recipiens aëre exhauriebatur: metallica massa interim prunis immersa candebat: clavis aperiebatur: aër in cavum recipiens penetrans per ardens metallum transire cogeatur, a quo ita vitiabatur, ut ablata lamina cuprea tegente flamma in ipsum immersa protinus extingueretur. Quod experimentum cum perpendissem, metalla candentia non aliter aërem vitiasse arbitrabar, quam a flamma, aut accenso carbone nostris in experimentis vitiatus fuisset. Igitur, & inferiori lanternæ foramini candens ferrum admovi, ut aër per id foramen irruens ferrum in transitu lamberet. Observavi autem ex ipso ferro lanternæ flammam similiter interiisse.

33. Jam vero, si ex vaporum & flamma exhalantium mixture aër vitaretur, profecto tot, ac tam diversæ substantiæ, quibus flamma ali potest, & quæ tot diversos halitus emittunt, unum eundemque effectum non præstarent: at demonstravimus non flammæ solum diversas, & vario pabulo altas, sed & carbones accensos, imo & candentia metalla proximum, & circumfluentem aërem ita mutare, ut alendæ flammæ impar evadat. Quapropter calore potius, qui idem est in omnibus hisce corporibus, nec nisi gradu

39

gradu in singulis differre potest, quam exhalantibus effluviis, quæ mirum in modum in singulis discrepant, aërem vitari arbitrabar, eoque magis quod nec condensatione, nec filtratione, nec ullo alio artificio (24, 25), id aëris vitium emendari, aut imminui potuerit.

34. Observaverat porro idem Cl. Auctor, aërem per tubos vitreos candentes trajectum non similiter vitari: quum vero mea experiundi methode hujusmodi tentamina facile perficerentur, libuit & hoc ipsum explorare. Itaque vitri solidi massam in rudem quandam annuli formam effictam, & extremitati tubi vitrei annexam in ignem injeci, ibidemque retinui donec candesceret: tum vix ab igne eductam proximæ lanternæ inferiori foramini admovi, ut aër per candentem annulum transire cogeretur: flamma nihilo minus, quam ex candente ferro extincta est. Dedimus porro operam in hisce experimentis, ne candente metallo, aut carbone, aut vitro foramen inferius clauderemus, sed ad latus foraminis ita aptabamus, ut influentis aëris transitum nullo pacto impedirent, adeo ut si frigida eodem situ aptarentur, nullum inclusæ flammæ detrimentum afferrent: imo observavimus, trajecto per ea candentia corpora aëre, citius, quam eodem intercepto, flammam suffocatam fuisse. Haec autem experimenta, cum facilia sint, poterunt qui rebus hisce delectantur suis ipsi oculis eorum veritatem confirmare: id tantummodo caveant velim, ne vitrum nimis tenue sit, aut non satis candens, neve tardius admoveatur; vitrum enim cito calorem amittit, eoque citius, quo tenuius fuerit: unde aëri pervertendo ineptum evadit, quem admodum experiundoprehendimus.

35. Quoniam autem vitrum candens effluvia in aërem emittere, aut ex aëre nutrimentum haurire vix verosimile videtur, si ejusdem fixitatem, & immutabilitatem in igne attendamus, in ea opinione confirmabar, calore potius, quam absorptis, aut emissis particulis aërem labefactasse.

36. Sed quae tandem huiusmodi mutatio est ab igne inducta, propter quam aër eidem diutius alendo ineptus fiat? rarefactionem non esse, aut mutatam aliam sensibilem qualitatem, tum vitii constantia ostendere videbatur (1), tum Hauksbei testimonium, qui in aëre per candentia metalla trajecto nullam sensibilibus ejusdem qualitatum mutatam, consulto institutis experimentis, se deprehendisse (2) testatur; tum demum Greenwoodii tentamina, qui aërem putei, in quem demersa candela extinguebatur, in sensibilibus suis qualitatibus mutatum minime fuisse comperit (3). Nihilominus cupiebam aërem, qui per flammam, aut prunam, aut ardens vitrum trajiciebatur, prius per aquam frigidam trajectum refrigerari, antequam ad flammam alendam perveniret, ut rarefactionis suspicio omnis tolleretur. Ad id Eques Salutius per foramen poculi ad fundum pertusi tubum vitreum trajecit, & ita glutinavit, ut poculum infusam aquam contineret, postea superius tubi extremum in inferius lanternae foramen immisum similiter glutinavit, ac demum ad inferiorem aperturam, flammam, prunam, candensque vitrum identidem admovimus, & flammam lanternae inclusam non minus perire observavimus, ac quando haec ad lanternae foramen immediate admovebantur. Quamquam vero aërem trajectum per tubi portionem aquae immersam refrigerari, ac condensari omnino debuerat; ipsum tamen Hauksbei experimentum renovare constitui, ut de aëris condensatione eo tutior esse possem; sed tubi ardentes, ex impetu irruentis aëris constringebantur: si vero candens vitrum ad foramen admoveretur, per quod aër in recipiens vacuum penetrare debebat, cito adeo refrigerabatur, ut aër sufficientem caloris gradum experiri non posset, ex eo vel maxime, quod tanta celeritate aër in vacuum recipiens irruat, & tanta proinde celeritate per can-

(1) Loc. cit.

(2) Lib. mox cit. tom. 5. p. 10. 11.

candens vitrum trājiciatur, ut sufficientem ex ipsius calore mutationem neutiquam pati videatur: idcirco eam methodum deseruimus, eoque libentius, quod simpliciorē, commodioremque Eques Salutius proposuisset, ut scilicet phiala vitrea, longo collo instructa, nudo igni immediate exponeretur. Collo vesicam flacidam circumligauimus, ut aër, qui vi ignis rarefactus e phiala erumpebat, eadem excipi posset; & postea frigore condensatus ex vesica in phialam iterum pelleretur pressione externi aëris, qui eo pacto ab ejusdem cavo arcebat. Experimentum scilicet expectationi respondit. Nam phiala tamdiu in igne relicta, donec canderet, vesica intumuit, postmodum, phiala ab igne remota, & refrigerata, pristinam flacciditatem vesica adeptā est, fractoque demum inversae phialae collo, & immissa in ejus cavum ardente flamma, protinus extingui observauimus, perinde ac si aër alia flamma corruptus fuisset.

37. Cum vero id experimentum demonstrasset caloris vi talem in minimis particulis aërem componentibus mutationem induci, ut igni sustentando ineptus evaderet; sperare coepi, frigore, quod contrariam mutationem induceret, quaecunque demum ea mutatio esset, pristinam aëris constitutionem restitui posse: et experimentum quidem spem haud frustra conceptam fuisse comprobavit; cum enim candelam accensam per vitreae lagenae breve collum in ipsius cavitatem insinuassem, & accuratissime molli cera colli orificium obturauissem, flammam sponte extingui sinebam, ut aër lagena inclusus corrumpereetur: deinde, circumposita glacie, lagenam refrigerari curabam, & per duodecim quidem horas in eodem frigoris gradu detineri; postea, lagena e glacie educta, expectabam, donec ad cubiculi temperaturam ejus calor restitutus esset; & inversa demum lagena, ac referato collo, accensam candelam in lagenae ventrem intromittebam: flamma aliquandiu viva servabatur; idque experimentum aliquoties eodem eventu interuimus. Quando

F

vero

vero per duas, tresve horas duntaxat intra glaciem lagenae detenta fuerat, pristinam indolem flammae exitialem contentus aër retinebat: ex quibus intelleximus frigus, & quidem diuturnum requiri ad pravam aëris indolem corrigendam, quae ex ingenti calore orta sit.

38. Idem experimentum etiam in aëre, ex ignis exteriori actione corrupto Eques Salutius tentavit: scilicet lagenam vesica obturatam, quemadmodum §. praec. descripsimus, & ab igne paullo anteeductam in comminutam glaciem immerfit, ibique per plures horas detinuit, ac similem effectum assecutus est; ut scilicet immissa in inversae, & referatae lagenae cavitatem flamma, viva servaretur. Quae quidem experimenta, quanquam haud facile in praxim traduci possint ad flammae vitam clauso in spatio protrahendam; novam tamen lucem in physicam quaestionem hactenus obscurissimam afferre videntur, eaque de causa Physicis haud ingrata futura esse speramus.

39. Adhuc de postremo experimento (37) dubitatio aliqua mihi supererat (jamdiu enim vel nostro periculo didiceram, quanta in experimentis cautela adhibenda sit), quippe etsi cera, lagenae, quae in glaciem immersa fuerat, ostium, qua fieri potuerat accuratatione obturassent, nullum argumentum suppetebat, quo certus essem obturaculum omnem externo aëri aditum prohibuisse, in primis quando glaciei frigore, condensato interno aëre, externus in recipiens irruere conabatur. Ut ergo mea haec dubitatio solveretur, vas vitreum propemodum cylindricum elegi, quod undique clausum erat, sed prope summitatem binos tubos continuos habebat, qui in ipsius cavitatem hiabant: tuborum alteri siphon vitreus mercurium continens conglutinatorius est, per alterum accensa parva cerea candela in cylindri cavitatem immissa fuit, & interim molli cera, cui candela insisteret, tubum ipsum accurate obturavimus. Flamma per 25." aut 30." perduravit: postquam vero extincta est, mercurium in
ad-

adnexo siphonis crure uno circiter pollice supra libellam elevatum fuisse vidimus, sive id ex aëris prius a flammae calore rarefacti condensatione, sive ex aliqua etiam ipsius aëris absorptione oriretur: quando verò vas crasso glaciei strato undique fere circumdatum, & refrigeratum fuit (iis nimirum exceptis locis, ubi cera tubi obturati fuerant, quae ex glaciei, & aquae attactu a vitro secedere potuisset) mercurium adhuc tribus, quatuorve pollicibus supra libellam elevari vidimus, ex aucta scilicet interni aëris condensatione: addita verò pro opportunitate glacie in ejus locum, quae solvebatur, & effluebat, vas in eo statu retinimus per 6. circiter horas, locus autem mercurii in siphone, tum ante admotam glaciem, tum post ipsam adhibitam filotatus fuit: postremo e glacie vas eduximus, & in cubiculi temperatura diu reliquimus, sensimque ad priorem normam mercurium deprimi observavimus, non ultra descendere, multo minus ad libellam componi. Ex quo consequbatur nec aëris elasticitatem ex eo frigore fuisse mutatam (cubiculi enim eadem propemodum temperatura erat) nec exteriori aëri in recipiens aditum toto eo tempore patuisse. Tum igitur obturaculum, cui extincta candela insistebat, leniter eduxi; & accensam aliam immisi, ipsamque vixisse observavi, & tamdiu vixisse, quam cum recenti aëre vas plenum erat; ut aër ille procul dubio, contractum a priori flamma virium deposuisset.

40. Boerhaavius porro experimenta plura protulit partim sua, partim ex aliis Auctoribus selecta, quibus probavit, corpora sulphurea inclusa vasis; in quae aër non admittatur ex igne extrinsecus admoto, quantumvis vehementi nec inflammari, nec in partes resolvi posse. Quae quidem experimenta, cum ad rem nostram mirifice faciant, huc afferenda esse censui. Inquit itaque Vir Celeberimus (n):

F 2

Unus

Unus, idemque ignis, applicatus eidem corpori, sed cum diversis circumstantiis, mirifice totam suam actionem variat, imprimis quidem pro vario admissu aeris simul in operatione ipsa. Sumserat carbonem Hookius, incluserat pyxidi ferreae carbonem, dein operculo, cochlea accurate facta adacta, vas accuratissime occluserat. Sic commiserat ingenti igni diu. Neque interim tam violenta actione ignis carbo exustus erat, ubi eximebatur postea. Vid. vitam ejus in posthumis pag. XXI. unde collegerat subtilis Philosophus, aëra esse menstruum, quod agitatum igne, omnia dissolveret corpora sulphurea; quum ignis sine aëre id praestare non posset: idem in distillationibus jam olim Helmontius in carbone suo fixo observaverat. Et Papinus Recueil des machines pag. 25. 26.: Et scobem ego lini guajaci subtilem, coram vobis, usque adeo diuturno, adeo violento igne; ostendi tamen nigerrimam foecem superstitem retinuisse oleum sibi, nulla ignis potentia ex retorta expellendum. Simulac vero pulverem hunc carbonarium, patina larga exceptum, parva scintilla imposita, examinabam, statim omne nigrum oleum, cum fumo aromatico, cedrino, consumebatur, & vertebatur scobs in cineres inclusos, candidos. Camphoram spectate, Auditores. Tota in aëre consumitur incensa semel, licet aquae innatet. Pone in vase vitreo puro, cum alembico impositio, supra ignem, liquefcit, ascendit in alembicum, concrefcit in novam, eandemque iterum immutatam camphoram, idemque observabitur repetenti saepius. Nonne sulphur vastis clausis coërcitum, sublimatur centies, semper manens sulphur idem? Si vero inter sublimandum rimam vas contraxerit, atque liquefactum sulphur hac rima aëri contiguum evaserit, flammam caput subito, atque ocysime in flammam caeruleam; & acidum fumum resolvitur. Succinum certe in aëre aperto incensum totum fere deflagrat, flammam, ignemque alit. Idem si summò egeris, sed lento gradu aucto igne, ex retorta in excipulum, aquam, spiritum, salem volatilem acidum, oleum multiplex conficies, faciesque tandem igne maximo, ut tota substantia

per,

per collum retortae transcendat, ut saepe quidem praestiti, Ignis igitur sine aëre, vel cum eodem immoto, suffocante, agens in materiem inflammabilem, penitus alia efficit. Haec cum perpenderem, a summi Viri theoria non nihil recedebam; neque enim aëris immobilitas, aut defectus prohibere posse videbatur, quominus corpora in clauso spatio accenderentur, cum flamma ex iisdem orta, & vasis inclusa, ad tempus aliquod ardere pergat, eoque diutius, quo vasa ampliora fuerint, donec nempe omnis aër in vasis contentus flammae calore fuerit corruptus (27, 28): verosimilius propterea videbatur, exteriorem ignem, interea dum corpora calefacit vasis contenta, conclusum aërem ita pervertere, ut ipsorum inflammationi inservire non posset (36). Cum vero cogitarem specula caustica etiam, quae validissima sunt, calorem omnem in angustum spatium ita colligere, ut ad paucorum pollicum a foco distantiam calor mediocris omnino sit, (o) per ipsa corpora vasis inclusa calefieri vehementer posse conjiciebam, quin ambiens aër ex calore corrumperetur, atque adeo eo pacto, & inflammari, & ex inflammatione in partes resolvi debere; neque vanam conjecturam fuisse experimentum comprobavit: cum enim in amplam lagenam vitream recenti aëre plenam carbonem, sulphur, camphoram, successive immissem, & accurate obturato lagenae orificio, contenta corpora foco radiorum solarium per causticam lentem (p) collectorum exposuissem, ex unoquoque horum corporum fumum erumpentem observavi, & carbonis superficiem pluribus in locis in cinerem redegei, & ex camphora denuum, ac sulphure veram flammam excitavi, quibus rite perpenſis, extra controversiam positum esse videbatur, igne exterius adhi-

(o) Calor in distantia 5. pol. a foco speculi Vilettiani vix est 190. graduum ther. Faranehit. (Boerh. Ch. t. 1. p. 129.) quanto igitur minor erit in eadem distantia a foco speculorum, aut lentium multo debiliorum? quanto minor in majoribus ab iisdem focus distantis?

(p) Lens, qua usus sum, focum habebat ad distantiam semipedis circiter, convexo-convexa, erat quinque transversos digitos latitudine aequabat,

adhibito corpora vasis inclusa inflammari non posse, ex eo, quod interea dum corpora ipsa suscepto paulatim calore ad inflammationem disponuntur, ambiens aër simul calefactus vitietur, & alendae flammae impar efficiatur: Et aërem quidem calore corruptum ipsum esse, qui sulphuris inflammationem in vasis clausis impediatur, confirmat Equitis Salurii experimentum, qui cum sulphur in phiala angusti colli contentum, igni impositum non inflammari cerneret, mutato ope follis aëre, flammam emisisse observavit. Postremo pulvis pyrius, qui in corrupto ex calore aëre flammam emittit, is exterius admoto igne etiam accenditur (9): in corrupto autem aëre pulverem pyrium flammam emisisse observavi, dum in recipiens, in quo paullo ante flamma sponte extincta fuerat, quemadmodum §. 28. pyrobolum ex eodem confectum, & accensum immisi; nam intra id recipiens tamdiu arsit, quamdiu omnis pulvis consumtus fuisset.

41. At Nobilis Boyleus non solum corpora vasis vitreis inclusa, radiis lentis ope collectis, combuserat; verum etiam pastillo usus fuerat ejus naturae, ut semel accensus in libero aëre totus consumeretur, atque observaverat, ubi semel pastillus hujusmodi vasi inclusus ope lentis accensus fuisset, eo majorem ipsius quantitatem combustam fuisse, quo vas amplius esset, aut aër densior (*); adeo ut pastillus tum demum extinctus fuisse videatur, quando ipsius calore omnis aër in eodem vase conclusus vitiatum fuerat, & igni communi alendo ineptus evaserat.

42. Aër porro factitius e corporibus eductus immixtam flammam suffocat, ut Cl. Physici observarunt (r), cujus quidem phenomeni ratio ex nostris principiis deduci facile posse videtur; cum enim calore aër pervertatur, ita ut flam-

(9) Inter corpora inflammabilia ea tantum, quae nitrata sunt in clauso vase flammam concipere posse Macherus monet Ch. pratiq. t. 2. cap. 1. proc. 5.

(r) Boyle exper. physico-mech. cont. 2. artic. 5. exp. 3.

(*) Exper. physico-mech. cont. 2. artic. 7. exp. 2. 3.

flammae infensus evadat, cumque aër factitius, vel actuali igne educatur, vel effervescencia, aut putrefactione, quos motus utrosque ingens caloris gradus comitatur, vel demum e corporibus eruatur, quae ignis, calorisque actionem passa fuerunt, (f) patet et ipsum alendae flammae imparem esse debere (36).

43. Quod si nostra experimenta cum aliorum experimentis conferre pergamus, videmus Halesium aërem respirando jam ineptum, sola per telam laneam oleo tartari imbutam filtratione, iterum respirationi aptum reddidisse (1), cum contra nos aërem sustentandae flammae imparem, ne traiectione quidem per crassum ejusdem liquoris stratum, ad pristinam indolem restituere poterimus (25), quod significare videtur, aliam causam esse interitus animalium in clauso spatio, aliam extinctionis flammae; hanc ex mutatione ab igne inducta oriri, illum ex admixtis haeterogeneis vaporibus, animali exitialibus, qui a filtris retineri possint: quae quidem sententia Boylei experimento confirmari videtur, qui cum accensam flammam simul cum animali intra recipiens clausisset, flammam cito perire observavit, & interim animal nullum adhuc molestiae indicium praeuisse; adeo ut id vitium, quod aërem flammae sustentandae ineptum reddiderat, nullum animali incommodum afferret (4).

44. Equidem inversam propositionem experimento explorans, observavi aërem, intra quem animal perierat, sustentandae flammae ineptum fuisse; cum enim in recipiente eò modo disposito, quo §. 28. passerculus inclusus fuisset, & periisset ex impedito novi aëris accessu, iis symptomatibus, quae a Cl. Viris jamdudum adnotata sunt, obturaculum eduxi, quo lanciæ foramen obturabatur, &, im-

mersa

(f) Vid. suite de recherches sur le fluid. élast. par le Cheval. Saluce.

(1) Statiq. des vegetaux. exp. 116.

(4) Nova experimenta intra aërem, & flammam vitalem animalium exp. 1., & 2. Et Cl. Lagh. Comment. de Acad. Bonon. tom. 4. p. 88. in opus., qui tamen observat passerculi mortem ex flammae vaporibus 36. celeriore fuisse. ibid. p. 81.

mersa accensa candela in recipientis cavitatem, protinus extingui observavi, quod demonstrat aërem animali alendo ineptum, etiam ineptum fieri alendae flammae; forte quod vitium duplex contrahat ex animalis mora, alterum ab admixtis vaporibus, ex quo animali exitiale fiat, alterum actione pulmonum animalium, quos tories subire cogitur, ex quo flammae perniciosus evadat: et duplex quidem id vitium inesse videtur in aëre a carbonibus ardentibus, aut candentibus metallis corrupto (x), qui non tantum flammae exitialis est, ut aër a flamma alia vitiatus, sed & ipsis animalibus infestus apprehenditur.

45. Illud vero quaeri posset, num respiratus aër flammae exitialis evadat ex eo tantum, quod pulmonum calorem passus sit; num quod intra pulmonem, aut animale corpus ex alia causa id vitium contraxerit. Nam quod ignis, & calor aërem sustentandae flammae imparem reddat (36), id non prohibet, quominus et aliae causae id ipsum facere possint. In Physicis enim ita comparatum est, ut si errores vitare velimus, vix ultra experimenta progredi liceat: veruntamen haud leviter novae causae excogitandae, aut admittendae sunt, ubi jam certa suppetat, cum compendiosa natura, una causa, innumeros, ac mire diversos effectus producere soleat. Sequenti igitur experimento quaestionem definiendam suscepi. Ranam poculo vitreo, supra lancem metallicam (28) glutinato, inclusam, suffocavi: vixit autem per tres ferme dies. Una a morte hora lancis foramen aperui, & per ipsum accensam candelam in poculi cavitatem immisi: protinus extincta est, non secus ac in superiori experimento (44) contigisset. Cum vero ranae calor vix ullus sit, tuto concludi posse censeo, perversiorem aëris ex suffocatis animalibus ortam calori minime tribuendam esse, ac proinde non una, sed pluribus de causis nativam

(x) Boyle l. c. exp. 2. Hauksbè l. c.

tivam aëris compagem ita vitari, ut flammae alendae impar evadat: quamobrem nec definire audemus, num simile artificialis aëris vitium soli calori sit adscribendum (42), licet diurno frigore perinde fuerit emendatum, ac si ex calore productum fuisset (7).

46. Neque solum quando animal demum interiit (44, 45), sed etiam multo ante aërem flammae infestum deprehendi; adeo ut deinceps, non flammam solum, sed et ipsas immixtas prunas statim suffocaret. Quoniam vero aër in quo flamma extincta est, prunis non aequè noxius observatur, concludendum videtur, prunas, & animalium vitam (43) a leviori vitio, ex brevi flammae calore inducto, minus affici, dum ex graviore ejusdem speciei vitio, quod aut animalium vita, aut calor diurnus prunarum induxit, vehementer laedantur. In eam itaque opinionem adductus sum, ut putem, ab exhalantibus vaporibus utique animalia in clauso vase plurimum laedi, sed multo magis a vitio, & perversione ipsius aëris haud absimili illi, quam diurnus calor inducere potuisset. Profecto, quando experimentum Halesii (43), quo filtrationis ope, aër respirationi diutius aptus servatur, ita ab ingenuo Auctore propositum video, ut nec ipse satis eidem fidere videatur (a), multo minus vaporibus tribuendum cenſeo, quam principio fueram opinatus (43). Huc accedit quod vitium, quo aër ex suffocato animali inficitur, similiter diurnum esse comperio, ac illud, quod ex extincta flamma nascitur (28). Nam Boyleus aërem, in quo animal ante quatuor horas interierat immisso alteri animali, trium minorum spatio, mortem attulisse scribit (b),

G

quo

(7) Vid. suite des recherches sur le fluide élast. &c. par le Chev. Saluce.
 (a) Mais je ne ſçai, ſi cela ne doit pas être attribué à quelque paſſage inſenſible que l'air avoit pû ſe faire à travers les ligatures, je ne me ſouciai pas même de répéter l'expérience, crainte de m'altérer la poitrine en respirant ſi ſouvent ces vapeurs nuifibles. Statiq. des veget. exp. 116.

(b) Exp. phyſico-mechan. cont. 2. artic. 3. exp. 11.

quo certe tempore, animalis prius extincti vapores, qui aquosae indolis esse censentur (c) condensari, ac colligi debuissent: aër quoque factitius, undecim diebus, postquam e quercu fuerat eductus, vim veneficam retinuerat, qua immisum animal cito suffocavit (d): ex quibus erui posse videtur, aërem factitium, aut ex suffocatis prunis, aut animalibus depravatum multo gravius labefactari, ideoque non flammae solum, sed & prunis, & animalibus perniciosum esse; contra, qui flamma vitiatum fuit, flammae quidem nocere; sed, cum levius id vitium sit, quanquam ejusdem speciei, animalia, aut prunas manifeste laedere neutiquam posse. Caeterum, dum mutatae aëris constitutioni animalium in ipso inclusorum mortemtribuendam esse conjicio, minime inficior, collectis quoque vaporibus, animalia ipsa laedi plurimum posse; cum tam perspicua, tam vehemens sit diversorum effluviolorum actio in nervosum systema, ut nonnisi temere in dubium revocari possit. Hoc tantum suspicor, vapores ab animalibus emanantes, ipsorum vitae minus, quam mutatam aëris crasim insensos esse. Quid quod flammam, cujus extinctionem in clauso aëre mutatae aëris constitutioni adscribendam probavimus (36), a quibusdam tamen odoratis effluviis laedi Laghius testatur (e)?

47. Sed jam forte nimis conjecturis indulgimus: enim vero nobis visum est, propositam quaestionem non prius solvi posse, quam plura in eam rem experimenta tentata fuerint, quorum inspecto eventu, difficultas tandem omnis evanescat. Primo enim definire oporteret, quousque varii alitus ex odoriferis corporibus emanantes, & per interclusum aërem dispersi, flammae in ipsum immersae nocere possint: nocere enim Laghius innuit, quantum vero noceant

mi-

(c) Haller prim. lin. Physiol. §. 438.

(d) Hales apud Desagulierum. Vid. sag. de l'essence manf. philos. tom. 4. pag. 61. Vim vero veneficam aëris artificialis ab aliis corporibus educti demonstravit Boyle l. c. art. 5.

(e) L. c. pag. 85.

minime proponit; deinde opus esset Haleſii experimentum (43) commodiori methodo, qua ſuperius uſi fuimus, (25) iterum inſtituere, omniaque ipſius phaenomena, quae ad hanc rem facere poſſent diligenter adnotare: poſtea definire, an vitium, quod ex ſuffocato animali aër contrahit, quodque, non ſecus ac vitium ex flamma natum, diuturnum eſſe innuimus (46), glacie ita emendari poſſit, quemadmodum id, quod ex flamma provenit (37, 38, 39): experimento demum decernere opus eſſet, num aër, qui ignis exterius admoti calorem diu paſſus eſt, poſtea refrigeratus (36) immiſſis animalibus incommodum afferat: experimenta, verbo dicam, omnia in flamma capta, mutato congruenter apparatu, in animalibus inſtituenda eſſent. Quandoquidem vero huiusmodi experimenta multum operae, & temporis requirerent, quod nobis in praefentiarum deficit, cum noſter hic liber jam ſub praelo ſit; idcirco in tempus aliud diſſenda eſſe ſtatuimus.

DISSERTATIONES,

E T

OPUSCULA VARIA.

DISCONTINUOUS

OF THE

ALPHABETICALLY

M É M O I R E

DU CHEVALIER SALUCE

*Sur la nature du fluide Elastique qui se développe
de la Poudre à Canon.*



Es sentimens de ceux qui ont traité de la Poudre à Canon sont si partagés ; leurs raisonnemens sont si brillants, & paraissent si bien appuyés sur le vrai ; qu'il n'est pas possible au premier coup d'œil de se décider sur l'estime qu'on en doit faire. Le plan que je me propose de suivre dans une matière aussi épineuse, & si peu éclaircie, est de procéder le plus méthodiquement qu'il me sera possible à un nombre d'expériences décisives, dont je donnerai une exacte description, après avoir exposé en raccourci le sentiment de plusieurs grands Hommes : des résultats des expériences, je tâcherai de déduire toutes les conséquences qui dépendent de l'entière connaissance de la nature du fluide, & de la soigneuse observation des phénomènes ; c'est par la voie d'un enchainement naturel de faits, que je chercherai de satisfaire aux doutes qui partagent les Physiciens ; je n'entrerai dans aucune question qui ait rapport à la pratique : plusieurs célèbres Auteurs excités par l'importance, & la difficulté du sujet y ont exercé leurs talens. On a pu calculer l'action de ce fluide sans en connaître la nature, & on a tiré de cette Théorie tous les secours, dont la pratique avoit besoin. C'est un bonheur pour les hommes qu'ils puissent avec la seule connaissance des effets naturels, en faire des applications heureuses aux usages les plus utiles

4
à la Société avant d'être assurés des causes qui les produisent.

1. Les opinions sur la cause de la force, & des effets de la Poudre à Canon, se peuvent réduire à deux principales: Mr. le Chevalier Isaac Nevvton (a), qu'on peut considérer comme Auteur de la première, pense que la subite & véhémence raréfaction de la matière qui s'enflamme, & s'échauffe très-vivement la convertit en vapeurs, dont l'action violente se manifeste par une explosion & une force prodigieuse; car dit-il le charbon & le soufre qui s'allument aisément, mettent en feu le salpêtre, dont l'esprit converti en fumée détonne avec violence. Les vapeurs qui proviennent du volatil du soufre ne contribuent pas peu à en acraître la force. Mr. Wolff, & plusieurs autres Auteurs pensaient de même (b).

2. La seconde opinion est, que, lorsque la Poudre prend feu il se développe un fluide, dont l'élasticité était auparavant fixée, & qui gardait la forme d'un corps solide.

3. Quoique ce principe soit adopté par plusieurs illustres Auteurs, Mrs. Boyle (c), Papin (d), Jean Bernoulli (e), de la Hire (f), Belidor &c., tous ne

(a) Pulvis tormentarius, quum ignem concipit, abit in fumum flammantem. Carbo nimirum, & sulphur ignem concipiunt facillime nitrumque accendunt; nitrique spiritus inde in vaporem rarefactus, proruit cum explosione; similiter ac aquae vapor ex aeolipila. Sulphur quoque, ut est volatile, convertit se indem in vaporem; id quod explosionem illam adauget.

Explosio itaque pulveris tormentarii oritur ex celeri ac violenta actione, qua tota permixtio subito, & vehementer calefacta, rarefit utique, vel convertit se in fumum sive vaporem: qui denique vapor actionis istius violentia eodem tempore candefactus, flammæ nimirum speciem exhibet. Quæst. x. post. opt. pag. 139. 140.

(b) Musch. Phys. tom. 1. pag. 432.

(c) Op. var. pag. 36.

(d) Transf. phil.

(e) Op. om. tom. 1. Diss. de efferv. & ferm. pag. 34.

(f) Diss. de l'an. 1702.

5
conviennent pas sur la nature & sur la manière dont ce fluide agit. Quelques uns, comme Mr. Halles (*g*) ont conclu, par la ressemblance de ce fluide avec celui qu'ils avaient tiré d'autres corps solides par la distillation, ou autres procédés, qu'il était du véritable air, sans qu'ils se soient cependant attachés à en faire une analyse particulière, telle, que parait l'exiger la délicatesse & l'importance du Sujet.

4. Mr. Muschembroek (*h*), dont l'habileté dans les expériences est universellement reconnue, révoque en doute que le fluide élastique des corps soit du véritable air, & fait plusieurs objections au sentiment de Mr. Halles: & il a tâché même par plusieurs raisons de démontrer que ce n'était point en effet du véritable air.

5. L'autorité des grands Hommes que je viens de citer, ne servant qu'à augmenter mon incertitude sur la nature de ce fluide, j'ai eu recours, comme je me l'étais proposé, aux expériences, unique ressource pour démêler le vrai, & terminer les différens.

6. Je démontre par leur secours, en premier lieu, l'insuffisance de la première opinion; je fais ensuite une scrupuleuse analyse du fluide, en observant à peu près la méthode qu'a tenu Mr. Halles (*i*) pour en examiner d'autres; je réponds en troisième lieu aux objections de Mr. Muschembroek, en apportant les raisons que l'expérience m'a fournies.

7. Je me flatte par ce procédé de fournir des nouvelles lumières sur la Théorie Physique de la Poudre, & d'avoir par un cours naturel & simple donné la solution d'autres questions, sçavoir de la manière, avec laquelle la Poudre prend feu dans le vuide, & des effets qui en résultent ;
En

{ *g* } Stat. des veg. trad. par Mr. de Buffon pag. 164. & suiv., & 369.

{ *h* } Coll. Acad. tom. 1. add. 38.

{ *i* } Stat. des veg. pag. 166.

8. En premier lieu personne n'ignore que les vapeurs aqueuses perdent leur élasticité, & se convertissent en eau en refroidissant. Je prouverai donc, dans la suite, que le fluide élastique de la Poudre ne perd que peu de son élasticité, (*) & que par conséquent il ne saurait être produit par des vapeurs aqueuses.

9. Mr. Halles informé des expériences de Mrs. Boyle, Papin, Bernoulli &c., & connaissant (K) d'ailleurs la grande quantité d'air que contient le salpêtre, & eu égard aux raisons ci-devant citées ne balance point à croire que ce ne soit du véritable air. Cette conjecture cependant est combattue ainsi que je l'ai dit par les raisons suivantes de Mr. Muschembroek.

I. Que ce fluide n'est point propre à la respiration;

II. Qu'il n'entretient point le feu.

10. Mr. Halles (l) soupçonne, que ces effets soient produits par le mélange des exhalaisons sulfureuses, puisqu'il a démontré qu'elles absorbent l'air, & qu'elles nuisent à la respiration; en preuve de quoi, il compare (m) ses résultats avec ceux de Mr. Hauksbee: pour m'en convaincre, je n'ai pas hésité de tenter la séparation des exhalaisons sulfureuses, & faire ensuite la comparaison entre les propriétés du fluide qui en serait purgé, & celui qui les contiendrait encore; C'est pourquoi j'ai fait les expériences suivantes.

11. Premièrement pour m'assurer que ce fluide nuit aux animaux.

EXPE-

(*) J'ai dit que le fluide élastique de la Poudre perd un peu de son élasticité, parceque vraiment dans l'expér. que j'en ai fait, il est arrivé quelque changement à la hauteur du mercure, j'aurois cependant lieu de douter que l'atmosphère ait pu y contribuer, c'est pourquoi je me réserve à la répliquer avec plus de diligence.

(K) Voirs stat. des veg. pag. 159.

(l) Ibid. pag. 163.

(m) Ibid. pag. 197.

JE mis sous un récipient ^a en forme de bouteille placé sur la Pompe Pneumatique, une Caille: de l'embouchure ^b du récipient sortait un tube de verre, à l'extrémité ^c du quel était un petit flacon où j'avois mis de la Poudre, je lutai fortement toutes les jointures, je pompai ensuite par deux exantlations une partie de l'air, après lesquelles je fis placer un flambeau, dont la flamme répondait exactement à l'endroit ^d où était la Poudre dans le flacon: je continuai après cela à pomper l'air jusqu'à ce que l'animal donna des marques assurées qu'il alloit toucher à sa fin, terme précis où la Poudre devait s'enflammer, & que j'avois trouvé après plusieurs reprises, en effet elle prit feu, & le fluide passant dans le récipient étouffa l'animal; il est donc prouvé que le fluide élastique de la Poudre est pernicieux & mortel.

11. Les phénomènes que j'ai observé dans cette occasion sont les suivans;

I. Qu'une flamme lente & bleuâtre se manifeste lorsque la poudre commence à entrer en fusion;

II. Que lorsqu'elle s'embrase totalement elle ne fait point de bruit, & se convertit en une nuée opaque.

Les difficultés que j'ai rencontré dans l'exécution de cette expérience, m'ayant obligé de la répéter bien des fois, j'ai eu occasion de remarquer les précautions qu'il y faut apporter, je ne parlerai que des principales, pour épargner de peine à ceux qui se donneront celle de la répliquer.

I. Le flacon doit être bien sec, car sans cela il se fend dans le tems que la poudre prend feu; pour remédier à cet inconvénient, j'ai coutume de l'exposer petit à petit à un feu plus violent; & je l'y tiens pendant long tems, ayant soin pour prévenir la fusion, de le changer de situation.

2. La

II. La Poudre doit être pilée finement, parceque la propagation du feu étant interrompue dans le vuide, les grains ainsi divisés en parties fort petites sont plus contigus, & le feu s'y met plus aisément tout à la fois, lorsqu'ils sont échauffés.

III. La plus grande facilité de s'enflammer que la Poudre pilée a dans l'air libre, & la perte de force qu'elle paraît souffrir par cette opération, (à ce qu'on peut juger par le faible détonnement qu'elle fait) m'ont déterminé à en mettre une plus grande quantité dans le flacon; en effet l'événement a très-bien confirmé mon attente, & on peut en mettre davantage sans risquer de briser les vaisseaux, ce qui est d'autant plus utile dans cette expérience, où il faut une assez grande quantité de fluide, sans qu'il soit possible de faire un grand vuide à cause que l'animal périrait.

Cet effet surviendrait-il peut-être parceque la vitesse, avec laquelle l'air recouvre son élasticité trouvant moins de résistance, à cause que les parties n'adhèrent plus entr'elles par un si fort contact, la force en serait amoindrie?

13. Cette façon de mettre le feu à la poudre en échauffant le verre me paraît la plus propre, & la plus simple, outre les avantages qu'elle a d'être plus active, & d'en allumer une plus grande quantité, parce qu'elle peut embrasser une surface plus étendue.

Ce qui n'arrive pas en se servant d'un miroir, ou d'un verre ardent, puisque par ce moyen on n'embrase que les grains, sur lesquels tombent les rayons, car il faut remarquer ainsi que je l'ai dit en passant seulement (II.) que la Poudre dans le vuide ne s'embrase qu'après qu'une forte chaleur l'a mis en fusion; le miroir, ou verre ardent ne produit cet effet qu'aux peu de grains qu'il affecte; & l'application d'un fer rouge sous le disque de la platine de la Pompe, est une manière trop pénible, qui a en partie

partie le désagrément ci-devant indiqué, & qui plus est, elle ne peut convenir dans des expériences aussi délicates.

14. Par ce qui a été dit on voit clairement en premier lieu, que, ce n'est qu'en vertu de la résistance de l'air extérieur que la Poudre détonne, puisque dans un air fort rare, l'explosion se fait sans détonnement.

En second lieu, que l'air qui se trouve dans les intervalles de la Poudre grainée sert à la propagation du feu, car l'on fait, comme je l'ai dit, (13) qu'en se servant du miroir &c., ou du fer rouge l'on ne peut enflammer toute la Poudre, & si la communication du feu n'était point interdite l'inflammation de peu de grains devrait suffire pour mettre le reste en feu, & c'est aussi pour cette raison que je la fais piler, comme je l'ai fait observer, précaut. II.

15. La conjecture de Mr. Halles ne me paraissait pas moins fondée après l'expérience que je venais de faire, & dans l'intention de mettre fin à toute controverse, je commençai par réfléchir sur la nature de chaque individu, afin de me former du fluide l'idée la plus juste, & ayant considéré que le salpêtre contient un alkali fixe & un acide volatil, que le soufre est composé d'un acide, d'une matière huileuse & inflammable, que le charbon enfin contient une grande quantité de phlogistique; j'imaginai que le fluide serait constitué par des parties omogènes à celles des substances primitives, & en conséquence de ce jugement, je m'attachai à tenter la séparation des exhalaisons pernicieuses par une voye chimique.

16. Persuadé donc que ce fluide contiendrait essentiellement des parties acides vitrioliques & nitreuses, & une grande quantité de matières grossières, (15) j'eus recours à une substance alkaline qui retenant par une grande affinité les premières, interdiraient à l'aide des filtres le passage aux autres, & pour m'en convaincre je fis l'expérience suivante.

b

EXPE-

EXPERIENCE SECONDE.

Fig. 1.
pl. pr.

JE fis à l'appareil de la première expérience la variation seule du tube, qui sert de communication du récipient au flacon : j'en employais un fait en plusieurs pièces (rrrr) qui entraient l'une dans l'autre : chacune de celles, qui s'emboîtaient avoit un double filtre de gaze bien enduit d'huile, ou de sel tartre ; celui qui entrait dans le récipient était ou triple, ou bien d'une toile plus serrée. Les jonctions furent soigneusement lutées, & je procédai ensuite de la même manière, que dans la première expérience. La Caille par son abatement & ses contorsions, menaçait une fin prochaine. Le baromètre était à 10. pouces environ, lorsque la poudre s'alluma ; l'animal aussitôt prit sensiblement de nouvelles forces, loin de demeurer couché sur son ventre les yeux mourants, il se leva promptement, enfin il donna des marques non équivoques de l'alternative qu'il venait d'essuyer. Le baromètre dans ce moment baissa de 10. pouces environ ; les exhalaisons denses & noires ne passèrent point au delà du premier filtre : ayant répliqué cette expérience sans changer les filtres à cause de la grande quantité d'huile de tartre, dont je les avais enduits, j'en eus les mêmes résultats : j'ai trouvé après avoir ôté les filtres que le plus proche du flacon contenait une espèce de calcination en assez grande quantité, dans celui qui suivait un sel cristallisé, au troisième un peu du même sel, dans le dernier enfin je ne pû rien appercevoir de sensible.

17. Le sel qui se trouve dans le second & troisième filtre suivant le jugement que j'avais formé (16), devait contenir un espèce de nitre régénéré, car l'on sait (n) que de l'inflammation du soufre combiné avec le salpêtre, il s'élève

(n) Voy. Macquer. el. de Chim. prat. pag. 60.

s'élève des vapeurs, dont l'odeur est mêlée d'un esprit sulfureux & d'esprit de nitre, & si on les rassemble, on trouve effectivement que la liqueur est un mélange d'acide nitreux, d'acide de soufre & d'esprit sulfureux, ce qui étant combiné avec l'alkali du tartre, doit donner un composé de nitre régénéré & de tartre vitriolé, j'en ai mis sur un charbon en feu, & j'ai observé qu'il pétillait, & fusait sensiblement, ce qui a servi à me confirmer dans mon idée; faire d'une quantité suffisante de ce sel, je n'ai pu l'affujettir à d'autres examens.

18. Cette expérience comparée avec la précédente fait connaître que les exhalaisons infectées dont le premier fluide n'était pas purgé, sont celles qui ont fait périr l'animal, ce qui étant aussi arrivé à Mr. Muschembroek lui a donné lieu de douter que les fluides élastiques soient du véritable air.

19. J'ai employé le même artifice pour observer si le fluide ainsi purgé perd une aussi grande partie de son élasticité qu'en a perdu celui que Mr. Hauksbee avait gardé, ce qui devait servir à établir avec plus de fondement l'issue de mes recherches, quoique d'ailleurs Mr. Halles ait (o) vu qu'en distillant le salpêtre à travers l'eau, l'air qui s'en développait conservait son élasticité, ce qui n'arrivait pas sans cette précaution, car alors les résultats approchaient de ceux de Mr. Hauksbee.

EXPERIENCE TROISIEME.

UN robinet qui passait à travers la platine, & communiquait avec le récipient était soigneusement luté à la partie supérieure (o) du tube d'un baromètre, qui en cette occasion ne touchait point au mercure, mais il

Fig. 2.
pl. pr.

b 2

était

était recourbé en forme de siphon : le reste de l'appareil était conforme à celui de l'expérience seconde. Je fis le vuide, & le mercure se trouvait environ à 27. pouces de hauteur, lorsque la Poudre prit feu; les oscillations du mercure étant cessées, enforte-qu'on le voyait 10. à 11. pouces plus bas, je fermai le robinet, & je marquai avec un petit fil de soie ciré le point où répondait la surface supérieure adhérente aux parois du tube, j'ai laissé ensuite pendant long tems cet appareil sans que j'aie aperçu de changement bien sensible à la hauteur du mercure, & par conséquent à l'élasticité du fluide, de sorte que. j'ai lieu de croire que ces petites variations aient été causées par celles de l'atmosphère, ou si elles dépendaient encore du fluide, c'est peut être, parceque je ne l'ai pas assez purgé des exhalaisons vicieuses; car au lieu d'enduire les filtres d'huile, j'aurais pu mettre du sel de tartre qui les aurait retenu plus sûrement & en plus grande quantité; je suis d'autant plus porté à le conjecturer que les différences furent de peu de conséquence, tandis que Mr. Hauksbee (p) a trouvé que le fluide qu'il avait gardé dix-huit jours perdit en ce tems $\frac{2}{3}$ de son élasticité une seule 20.^{me} restant constante.

20. Par la comparaison des expériences de Mr. Hauksbee, & de Mr. Halles, il est d'autant plus plausible de conclure que le fluide élastique de la Poudre perd une grande partie de son élasticité à cause des exhalaisons sulfureuses, & des vapeurs acides; car Mr. Halles démontre que les exhalaisons, & les vapeurs de cette nature fixent, ou absorbent une quantité déterminée d'air, & que le reste ne souffre plus d'altération, ce qui est précisément conforme à l'issue qu'ont eu les expériences de Mr. Hauksbee, que j'ai citées ci-devant, *expér. 3.*

EXPE.

LE peu d'altération que, j'observai dans l'élasticité du fluide me détermina à profiter de cet appareil pour examiner un autre caractère du véritable air, il s'agissait d'observer dans quelle raison il se comprimerait, & par l'infusion que je fis de nouveau mercure dans la jambe recourbée, je trouvai qu'il se comprime à peu près de même que l'air commun en raison des poids.

Fig. 2.
Pl. Pr.

11. Mr. Muschembroek n'ayant point parlé de l'élasticité du fluide, & ayant remarqué seulement pour ainsi dire en passant la différence des raisons de compression entre ce fluide & l'air commun, je me ne suis pas trop attaché & n'ai pas pris toutes les précautions nécessaires pour décider incontestablement ces deux points; il est cependant bon de savoir que Mr. Halles (9) ayant comprimé de ces airs factices a trouvé aussi qu'ils suivent la loi de l'air commun.

12. La seconde objection de notre illustre Auteur ne peut qu'embarasser très-fort un Physicien par la grande difficulté qu'on rencontrerait dans l'arrangement d'une expérience qui ne laissa plus rien à désirer d'autant plus qu'il a laissé ignorer celles, par lesquelles il a trouvé que le fluide élastique éteint la flamme; elle n'est cependant pas à mon avis aussi solide, que l'autre, quoiqu'elle présente au premier coup d'œil quelque chose de plus frappant, qui paraît décider la question; l'altération que la chaleur violente cause à cette propriété de l'air, lors même qu'il est commun & naturel, nous tire de l'admiration où nous pourrions être en voyant dans le fluide élastique de la Poudre tous les caractères de l'air commun, excepté celui-ci; l'on sait que l'air

en

(9) Stat. des veg. pag. 164. & 169.

en passant par la flamme , ou autour des corps que l'on a fait fortement échauffer ne sçaurait plus être propre non seulement à entretenir un autre flamme , mais aussi à nourrir quelque feu que ce soit (r).

14. Delà il pourrait très-bien résulter que l'air nouvellement développé de la Poudre , quoique rendu à son premier état d'air commun , (en le purgeant des parties qui altéreraient si fort ses propriétés qu'on avoit lieu de douter avec quelque fondement de sa véritable nature) cet air dis-je se dégageant des obstacles qu'il n'aurait pu surmonter sans le secours du feu , qui lui fait recouvrer subitement son élasticité , peut être ne peut-il acquérir ce caractère , de même que l'air échauffé dans un récipient sans rien perdre de sa gravité spécifique , de son élasticité &c. est cependant privé entièrement de cette vertu.

15. Après tout ce que nous venous de dire , il paraît qu'il n'y a plus aucun lieu de douter de la nature du fluide élastique de la Poudre ; l'air par conséquent est le grand mobile des effets surprenans , que nous voyons , & le violent ressort , qui agit si puissamment , en vertu des particules ignées qui le mettent en action : de sorte que l'air contenu dans chaque grain fait le principe virtuel de la force , celui qui se trouve dans les intervalles des grains sert de véhicule à l'inflammation , & l'extérieur cause le détonnement par la collision & l'impulsion que souffrent ses particules de celles qui se développent avec une vitesse prodigieuse à l'inflammation de la Poudre.

16. Puisqu' après avoir analysé le fluide élastique en question il est démontré en conséquence que l'opinion des Auteurs cités (1) quelque ingénieuse & brillante qu'elle soit , n'est pas confirmée par l'expérience , il est tems d'examiner les sentimens de ceux dont j'ai parlé (2) pour en démêler

(r) Com. pag.

15

mélér les circonstances qui font naître les différences entr' eux sur la manière, avec laquelle ils font agir l'air, qu'il reconnoissent tous comme la cause des effets de la Poudre, sans qu'ils en aient assuré la vérité par des expériences.

I. Mr. Jean Bernoulli (*) prétend, que le feu met en action l'air condensé dans chaque grain.

II. Mr. de la Hire (†) ajoute que non seulement l'air des grains est mis en agitation par le feu, mais aussi celui qui se trouve dans les interstices.

III. Mr. Belidor enfin généralise l'opinion, & ne met point de restriction à l'action de l'air, d'où l'on peut inférer qu'il comprend aussi l'air extérieur.

27. Par ce qui a été dit on doit former le jugement suivant.

I. Que Mr. Bernoulli par son avis n'assigne que la source du fluide qui fait l'activité intrinsèque de la Poudre, sans que tous ses effets ordinaires soient compris en effet sous l'idée qu'il avait de l'action de l'air, car il n'aurait pu combiner par ce seul secours le détonnement & la propagation du feu avec l'explosion.

II. Mr. de la Hire a quelque avantage sur Mr. Bernoulli, puisqu'il pourrait indiquer la propagation du feu, cependant son opinion est encore imparfaite.

III. Mr. de Belidor n'ayant spécifié aucune espèce d'air, en sorte, qu'il n'entre point à déterminer l'action particulière qu'elle exerce à chaque phénomène, a donné une explication conforme à la vérité de la cause générale des effets ordinaires, qui n'est en ce cas que la combinaison des trois différentes propriétés, avec lesquelles l'air influé sur les phénomènes mentionnés.)

(*) Op. om. tom. pag. 34.

(†) Diff. an. 1702.

28. Il fera moins difficile à présent d'avoir avec plus de précision plusieurs des connuës nécessaires aux Mathématiciens pour résoudre tous les Problèmes ballistiques, & les autres de cette nature, puisqu'en se servant des mêmes artifices, dont j'ai usé, il ne s'agira plus que d'observer les différences des résultats causées par les altérations apportées au fluide. Les expériences n'en seront sans contredit pas moins délicates: l'utilité réelle qu'on y trouvera, sera celle d'avoir une baze constante, dont on a déjà bien des notions assurées, vu que plusieurs de ses propriétés caractéristiques sont soumises à des loix immuables, qui sont sous l'empire du Calcul: quoique ces données aient été prises jusqu'à présent, (de l'aveu de Mr. Euler dans ses notes à Mr. Robins) plutôt hipotétiquement à cause des grandes difficultés que l'on rencontre, cependant bien des savans se servant des observations plus aprochantes du vrai, ont répandu de grandes lumières sur ce sujet, non seulement par la résolution de plusieurs Problèmes, mais encore par les méthodes qu'ils ont fourni pour résoudre les autres Problèmes possibles.

29. Mr. Nevvton est le premier qui aie recherché la courbe que trace un corps poussé par la force de la Poudre en suposant la résistance de l'air proportionnelle aux quarrés des vitesses, & après bien des soins il l'a déterminée par approximation. Mr. Jean Bernoulli en donna ensuite une solution plus ample & plus exacte. Mr. Benjamin Robins après avoir trouvé que la vitesse, avec laquelle l'air se précipite dans le vuide est moindre que celle, avec laquelle se meut un projectile poussé par la force de la Poudre, a déterminé la résistance de l'air presque en raison des cubes, & Mr. D'Alembert rapportant ce principe dans son excellent ouvrage sur la résistance des fluides, lui fait une ingénieuse application du Calcul; Mr. Euler enfin a donné dans ses notes à Mr. Robins & dans

17
dans une Dissertation particulière, (u) tout ce que l'on
peut trouver de plus complet à présent: il y a même
ajouté des méthodes, & des formules pour résoudre les
cas possibles. Je n'entrerai pas dans un plus grand dé-
tail sur ces sortes d'applications, une telle digression étant
tout à fait étrangère au sujet que je me suis proposé.

(u) Mém. de l'Ac. R. des Sc. de Berlin tom. 6.



RECHERCHES

SUR LA METHODE

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. **L**ES Géomètres savent depuis long-tems, que lorsque la première différentielle d'une variable quelconque disparoit sans que la seconde disparoisse en même tems, elle devient toujours un *maximum*, ou un *minimum*; & en particulier elle est un *maximum*, si la différentielle seconde est négative, & un *minimum*, si cette différentielle est positive. Si la différentielle seconde disparoit en même tems que la première, alors la quantité n'est ni un *maximum*, ni un *minimum*, à moins que la troisième différentielle ne disparoisse de même, dans lequel cas la proposée deviendra un *maximum*, si la différentielle quatrième sera négative, & un *minimum*, si elle est positive, & ainsi de suite. En général, pour qu'une quantité soit un *maximum*, ou un *minimum*, il faut que les ordres successifs des différentielles, qui s'évanouissent ensemble, soient en nombre impair, & alors elle est sûrement un *maximum*, ou un *minimum*, selon que la différentielle qui suit la dernière évanouissante se trouve négative, ou positive. Voyez Maclaurin, traité des fluxions p. 238. & 857.

2. Tout ceci supposé & bien entendu, que Z représente une fonction algébrique des variables $t, u, x, y, \&c.$, & qu'on se propose de la rendre un *maximum*, ou un *minimum*. Soit selon les regles ordinaires

 dZ

$dZ = p dt + q du + r dx + s dy + \&c.$, & l'on aura d'abord cette équation

$p dt + q du + r dx + s dy + \&c. = 0$. Mais comme la relation entre $t, u, x, \&c.$ est encore indéterminée, de même que celle de leurs différentielles $dt, du, dx \&c.$, & que d'ailleurs l'équation donnée doit être vraie quel que soit leur rapport; il est évident que pour les chasser tout à fait de l'équation, il faut évaluer séparément à zéro chaque membre $p dt, q du, r dx \&c.$, d'où l'on tire autant d'équations particulières qu'il y a de variables savoir $p = 0, q = 0, r = 0 \&c.$ Par le moyen de toutes ces équations on trouvera les valeurs de chaque inconnue, $t, u, x \&c.$ qui substituées dans la fonction proposée Z la rendront un *maximum*, ou un *minimum*.

3. Passons maintenant à l'examen de la seconde différentielle. En supposant, ce qui est permis, les premières différentielles $dt, du, dx \&c.$ constantes, l'on aura $d^2Z = dp dt + dq du + dr dx + ds dy + \&c.$

Soit $dp = A dt + B du + D dx + G dy$

$dq = B dt + C du + E dx + H dy$

$dr = D dt + E du + F dx + I dy$

$ds = G dt + H du + I dx + L dy$

ce qui donnera

$d^2Z = A dt^2 + 2 B dt du + C du^2 + 2 D dt dx + 2 E du dx + F dx^2 + 2 G dt dy + 2 H du dy + 2 I dx dy + L dy^2$.

Pour commencer par le cas le plus simple supposons qu'il n'y ait qu'une seule variable t , de sorte que $d^2Z = A dt^2$; on voit d'abord que, puisque dt^2 est toujours positif, la différentielle d^2Z doit avoir le même signe que la quantité A ; donc si A est positif Z sera un *minimum*, & si A est négatif il sera un *maximum*; si $A = 0$ on suivra les règles données §. 1.

4. Les variables contenues dans Z soient deux, savoir t & u ; alors $d^2Z = A dt^2 + 2B dt du + C du^2$. Il paroît au premier aspect bien difficile de connoître si cette expression d^2Z doit être positive, ou négative, sans qu'on ait le rapport de dt à du , qui n'est pas donné; car puisqu'en changeant ce rapport la fonction d^2Z doit aussi varier, il semble indubitable qu'elle pourra aussi passer du positif au négatif, & du négatif au positif, pendant que les quantités A, B, C restent les mêmes. Qu'on donne cependant à la proposée $A dt^2 + 2B dt du + C du^2$ cette forme $A (dt + \frac{B du}{A})^2 + (C - \frac{B^2}{A}) du^2$; & on verra que, comme les carrés $(dt + \frac{B du}{A})^2$, & du^2 ont toujours le même signe $+$, toute la quantité sera nécessairement positive si les deux coefficients A & $C - \frac{B^2}{A}$ sont positifs, & au contraire elle deviendra négative, lorsque ceux-ci seront tous deux négatifs, quel que soit le rapport de dt à du . On aura donc pour le cas du *minimum* $A > 0$ $C - \frac{B^2}{A} > 0$ savoir $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$ ce qui donne de même $C > 0$; à moins donc que les quantités A, B, C n'aient ces conditions $A > 0$, $C > 0$, & $AC > B^2$ la proposée Z ne pourra pas être un *minimum*. En second lieu on trouvera pour le *maximum* $A < 0$ $C - \frac{B^2}{A} < 0$ savoir $C < \frac{B^2}{A}$, $CA > B^2$, puisque A est négatif; ce qui donne encore $C < 0$; donc les conditions pour le *maximum* seront en partie les mêmes, & en partie précisément contraires à celles du *minimum*.

5. Si A ou C , ou toutes deux sont $= 0$ sans que B le soit aussi, la condition de $AC > B^2$ ne pourra pas subsister, ainsi la quantité proposée ne deviendra jamais un vrai *maximum*, ou *minimum*; la même chose arrivera toutes les fois que A , & C seront de signe contraire; car puisque B^2 est toujours positif la condition de $AC > B^2$ devient impossible. Si B s'évanouissoit encore en même tems que A , ou C ; $d^2 Z$ se trouveroit réduite au cas d'une seule variable, & par conséquent pourroit être de nouveau un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un, ni l'autre, selon ce qu'on a dit pour le premier cas. Enfin si la quantité $d^2 Z$ étoit toute $= 0$, savoir $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, il faudroit recourir à la différentielle troisième; que si celle-ci se trouve n'être pas égale à zero, la quantité Z ne peut être ni un *maximum*, ni un *minimum*; & au contraire si elle évanouit en même tems que la seconde on cherchera tout de suite la quatrième; & si elle n'est pas évanouissante il sera facile par la méthode dont nous nous sommes servi ci-devant de connoître si elle est positive, ou négative, ce qui déterminera de nouveau le *maximum*, ou le *minimum*.

6. Lorsque les variables sont trois, savoir t , u , x la différentielle $d^2 Z$ prend cette forme $d^2 Z = A dt^2 + 2 B dt du + C du^2 + 2 D dt dx + 2 E du dx + F dx^2$ qu'on réduira d'abord à

$$A \left(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A} \right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A} \right) du^2 \\ + 2 \left(E - \frac{BD}{A} \right) du dx + \left(F - \frac{D^2}{A} \right) dx^2$$

Soit posé $C - \frac{B^2}{A} = a$, $E - \frac{BD}{A} = b$, $F - \frac{D^2}{A} = c$,

& on aura $d^2 Z = A \left(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A} \right)^2 + a du^2 + 2 b du dx + c dx^2$; qu'on opère à présent sur

sur ces trois derniers membres, comme on a fait ci-dessus §. 4., & toute la différentielle proposée $d^2 Z$ deviendra $A (dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A})^2 + a (du + \frac{b dx}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{a}) dx^2$; or les quarrés $(dt + \frac{B du}{A} + \frac{D dx}{A})^2$, $(du + \frac{b dx}{a})^2$, & dx^2 étant toujours positifs, toute la différentielle sera de même positive si les coëfficiens A , a , & $c - \frac{b^2}{a}$ ont chacun le signe +; on a donc pour le *minimum* les conditions suivantes $A > 0$, $a > 0$, $ca > b^2$, ou en remettant au lieu de a , b , c , leurs valeurs, $A > 0$; $C - \frac{B^2}{A} > 0$, $(C - \frac{B^2}{A}) \times (F - \frac{D^2}{A}) > (E - \frac{BD}{A})^2$ savoir $A > 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$, d'où il résulte encore $C > 0$, $F > 0$, & $FA > D^2$. On trouvera par les mêmes principes pour le *maximum* $A < 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$, & par conséquent $C < 0$, $F < 0$, & $FA > D^2$.

7. Si les quantités A , & C évanouissent seules, ou toutes deux, ou une simplement, la seconde condition devient impossible; si c'est F qui s'évanouit, alors la troisième devient impossible; car $(CA - B^2) \times -D$ qui est nécessairement négatif, à cause de $CA > B^2$ doit toujours se trouver moindre de $(EA - BD)^2$, d'où il suit que Z ne sauroit être un *maximum*, ou un *minimum*, si A , C , D prises séparément, ou ensemble comme on voudra sont égales à zero. Si par l'évanouissement des termes la différentielle $d^2 Z$ se reduisoit à deux variables, ou à une seulement, elle tomberoit dans le second cas, ou dans le premier, & on devroit suivre les regles données §. 3., & suiv. Enfin si toute la $d^2 Z$ se trouvoit égale à zero, &

que

que la différentielle troisième ne soit pas de même égale à zero, on seroit sur que la proposée Z ne pourroit jamais devenir ni un *maximum*, ni un *minimum*; & quand cette différentielle troisième évanouiroit avec la seconde, par des transformations semblables à celles que nous avons pratiquées, on pourroit dans la quatrième différentielle distinguer les cas du *minimum*, & du *maximum*, & ceux qui sont inutiles.

8. On peut étendre la même théorie aux fonctions de quatre, ou plus variables. Quiconque aura bien saisi l'esprit des réductions que j'ai employées jusqu'ici, pourra sans peine découvrir celles qui conviendront à chaque cas particulier. Au reste pour ne pas se méprendre dans ces recherches, il faut remarquer que les transformées pourroient bien venir différentes de celles que nous avons données; mais en examinant la chose de plus-près on trouvera infailliblement que quelles qu'elles soient, elles pourrout toujours se réduire à celles-ci, ou au moins y être comprises.

9. Comme je crois cette théorie entièrement nouvelle, il ne sera peut-être pas inutile d'ajouter les réflexions suivantes. Quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction proposée Z ; si on les regarde chacune en particulier, & qu'on cherche le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient pendant que toutes les autres demeurent les mêmes, on trouvera à part les premières différentielles $p dt$, $q du$, $r dx$ &c., dont chacune étant égale à zero, nous donneroit les mêmes équations que ci-dessus, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ &c. §. 2. De la même manière passant aux différentielles secondes, on trouveroit celles-ci séparément $A dt^2$, $C du^2$, $F dx^2$, $L dy^2$ &c., & par conséquent si A , C , F , L &c. sont toutes positives, ou négatives, on pourroit croire que cela suffit pour que les valeurs de t , u , x &c. tirées des équations $p = 0$,
 $q = 0$

$q = 0$ &c. rendent nécessairement la proposée Z un *minimum*, ou un *maximum*. Il est vrai en effet que par rapport à chacune de ces variables considérées à part la quantité donnée Z devra toujours être la plus grande, ou la plus petite; mais est-il certain que ce qui vaut pour chacune prise séparément doive aussi valoir pour toutes ensemble? Examinons la chose plus intimement.

10. Que la proposée Z contienne les seules variables t & u , & on pourra la regarder comme l'ordonnée à une surface, dont t & u sont les deux autres; donc la question dans ce cas se réduit à trouver la plus grande, ou la plus petite ordonnée d'une surface, dont l'équation est donnée, savoir $dZ = p dt + q du$. Si l'on fait u constant, elle se réduit d'abord à $dZ = p dt$, & dans ce cas elle exprime toutes les sections de la même superficie parallèles à l'axe des t , à mesure que la quantité u reçoit des valeurs différentes. Soit donc posé $p = 0$, & on aura §. 1. une valeur de t qui donnera la plus grande, ou la plus petite ordonnée Z dans chacune de ces sections parallèles; mais puisque u est constant, si l'on différentie de nouveau la dZ on a $d^2 Z = A dt^2$, & par conséquent on jugera du *maximum*, ou *minimum* par la seule valeur de A , après y avoir cependant substitué à la place de t la valeur que fournit l'équation $P = 0$. Savoir si A se trouve positive, ou négative quelle que soit la valeur d' u , ou bien si en changeant u , elle peut aussi changer de signe, on conclura dans le premier cas que toutes les dites sections ont un *maximum*, ou un *minimum*, & dans le second qu'elles ont entre certaines limites un *maximum*, entre d'autres un *minimum*. Si A est $= 0$, quelle que soit la valeur de la constante u , alors aucune des dites sections n'aura ni un *maximum*, ni un *minimum*. Mais si A devient seulement $= 0$, lorsque u a de certaines valeurs données, dans ces cas seulement les sections cor-

respon-

respondantes seront destituées du *maximum*, ou du *minimum*. Le lieu de toutes ces ordonnées qui sont un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre sera contenu dans l'équation $p = 0$, en ayant égard à la seule variabilité de u , elle formeront donc dans la même superficie une section qui sera à simple, ou à double courbure, & qui sera déterminée par les deux équations conjointes $dZ = p dt + q du$ & $p = 0$, ou $dZ = q du$ & $p = 0$. On voit par là, que pour trouver le *maximum*, ou le *minimum* de la surface entière, il faudra chercher la plus grande, ou la plus petite ordonnée qui convient à cette même section; on aura donc de nouveau $q = 0$, ce qui donnera la valeur de l'autre variable u .

11. Passons maintenant à la différentielle de q ; elle a été d'abord supposée $= B dt + C du$ §. 3.; mais puisque dans ce cas t est déterminé par u dans l'équation $p = 0$, ou bien dans sa différentielle $A dt + B du = 0$, dt est $= -\frac{B du}{A}$, ce qui rend $dq = (-\frac{B^2}{A} + C) du$; il resul-

te donc que si $-\frac{B^2}{A} + C$ est positif, savoir si $C > \frac{B^2}{A}$

l'ordonnée sera la moindre; si $C < \frac{B^2}{A}$ elle sera la plus

grande, & si $C = \frac{B^2}{A}$ elle ne sera ni l'une, ni l'autre, à moins que les conditions requises dans les différentielles des genres plus élevés ne soient remplies. Or en réfléchissant sur ces *maximum* & *minimum*, il sera aisé de comprendre que l'ordonnée Z ne pourra pas être un *maximum* entre toutes les autres, à moins qu'elle ne soit la plus grande de toutes celles qui sont contenues dans la section déterminée par $dZ = q du$, & de plus que toutes les ordonnées qui composent cette même section ne soient encore elles mêmes des *maximum* dans les sections

d

paral-

parallèles correspondantes. §. 10. On prouvera de même que la quantité Z ne sauroit être absolument un *minimum* sans qu'elle soit de même un *minimum* dans la section qui contient tous les *minimum*. Car dans tous les autres cas l'ordonnée seroit ou la plus grande, ou la plus petite d'entre celles qui ne sont ni les plus grandes, ni les plus petites, ou bien entre les plus grandes, ou les plus petites, elle ne seroit ni la plus grande, ni la plus petite, ou enfin elle seroit la plus grande d'entre les plus petites, ou au contraire, ce qui ne donne pas un vrai *maximum*, ou *minimum* comme on cherche. De tout ceci je conclus donc qu'après avoir tiré des équations $p = 0$, $q = 0$, les valeurs de t & u , & les avoir substituées dans A , & dans $C - \frac{B^2}{A}$ il faut pour que Z soit un vrai *maximum*, que A soit négatif, & $C < \frac{B^2}{A}$, savoir $CA > B^2$; & au contraire si Z doit être un vrai *minimum* on doit trouver A positif, & $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$, conformément à la théorie générale expliquée §. 4., & suiv.

12. Si au lieu de considérer d'abord u constant & t variable, on avoit fait u variable & t constant, on seroit parvenu aux déterminations suivantes $C < 0$, & $AC > B^2$, pour le *maximum* $C > 0$, & $AC > B^2$, pour le *minimum* ce qui revient au même. Au reste cette méthode que nous venons d'employer pour découvrir les conditions des *maximum* & *minimum* dans les fonctions à deux seules changeantes, est également applicable à toutes les autres fonctions plus composées, elle a même l'avantage d'être plus analytique, & plus directe que la première, c'est pourquoi je tâcherai ici de la développer dans toute sa généralité.

13. Soient les variables contenues dans Z en tel nombre qu'on voudra ; je ne considère d'abord qu'une variable seule , & je tire par la différentiation l'équation pour le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient ; puis en passant à la différentielle seconde , je trouve les conditions qui déterminent la proposée à être un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre. Après cette première opération je substitue dans Z , ou dans ses différentielles simplement la valeur de la première variable trouvée , & je procède sur un autre variable de la même manière ; ensuite mettant de nouveau dans la fonction proposée Z la valeur qu'on aura trouvée pour cette seconde variable , on passera à l'examen d'une troisième variable ; & ainsi de suite &c. Soit t la première variable qu'on veut considérer dans Z , & on aura $dZ = p dt$; & $d^2 Z = A dt^2$; d'où $p = 0$, & $A > 0$ pour le *minimum* ; $A < 0$ pour le *maximum* §. 1. Que t & u , soient à présent toutes deux variables , il en résultera $dZ = p dt + q du$ qui à cause de $p = 0$ se réduit à $dZ = q du$, d'où l'on tire $d^2 Z = (B dt + C du) du$; mais puisque $p = 0$; dp le sera aussi , & par conséquent $A dt + B du = 0$; ce qui donne $dt = -\frac{B du}{A}$; cette valeur substituée dans $d^2 Z$ la changera en $d^2 Z = (-\frac{B^2}{A} + C) du^2$, j'aurois donc $q = 0$; & $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ pour le *minimum*, & $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ pour le *maximum*, savoir, puisque A est positif dans le premier cas, & négatif dans le second, en multipliant par A , il résultera toujours la même condition de $AC > B^2$. Si outre les deux précédentes il y a encore une troisième variable x à considérer, je cherche la valeur de dZ eu égard à ces trois variables t, u, x , & je trouve $dZ = p dt +$
 $d^2 Z = q du + r dx$

$q du + r dx$ ce, qui à cause de $p = 0$, $q = 0$ se change en $dZ = r dx$; donc la différentielle seconde $d^2 Z$ sera $= (D dt + E du + F dx) dx$. A présent par le moyen des équations $p = 0$, $q = 0$, ou bien de leurs différentielles $A dt + B du + D dx = 0$, & $B dt + C du + E dx = 0$ je cherche des valeurs de dt & du en dx , & je trouve

$$dt = \frac{BE - CD}{AC - B^2} dx; \quad du = \frac{BD - AE}{AC - B^2} dx \text{ je les sub-}$$

stitue dans l'expression de $d^2 Z$; ce qui me donne.

$$d^2 Z = \left(\frac{BE - CD}{AC - B^2} D + \frac{BD - AE}{AC - B^2} E + F \right) dx^2 \text{ Il}$$

résulte donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum*. $r = 0$; ensuite

$$\frac{BE - CD}{AC - B^2} D + \frac{BD - AE}{AC - B^2} E + F > 0 \text{ pour le } \textit{mini-}$$

um, & < 0 pour le *maximum*, ou bien en ôtant le dénominateur $AC - B^2$ qui est toujours positif, on a $BDE - CD^2 + AE^2 - FB^2 + ACF > 0$ pour le *minimum*, & < 0 pour le *maximum*. Soit multipliée cette expression par A qui est positif dans le premier cas, & négatif dans le second, & on aura

$$ABDE - ACD^2 + AE^2 - AB^2 F + A^2 CF > 0$$

soit pour le *maximum*, soit pour le *minimum*, savoir $(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$. On suivra le même procédé pour un plus grand nombre de variables.

14. Cette méthode étant générale pour quelque nombre de variables que ce soit, ne sera pas bornée aux seules fonctions algébriques, mais pourra encore s'étendre avec succès aux *maximum* & *minimum* qui sont d'un genre plus élevé, & qui appartiennent à des formules intégrales indéfinies. Je me réserve de traiter ce sujet que je crois d'ailleurs entièrement nouveau dans un ouvrage particulier que je prépare sur cette matière; & dans lequel après

avoir

avoir exposé la méthode générale, & analytique pour résoudre tous les problèmes touchant ces sortes de *maximum*, ou *minimum* j'en déduirai, par le Principe de la moindre quantité d'Action, toute la Mécanique des corps soit solides, soit fluides.

15. Je finirai ce mémoire par quelques exemples des plus simples qui éclaircissent la théorie qu'on vient d'établir. Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élastiques, & rangés en ligne droite sans se toucher; supposons que le premier vienne choquer le second avec une vitesse donnée c , le second avec la vitesse acquise du premier choque le troisième, & ainsi de suite, les masses du premier & du dernier étant données, on demande celles des corps intermédiaires, afin que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible. Soit a la masse du premier, & b celle du dernier; soient ensuite t, u, x, y &c. les masses intermédiaires inconnues; par les loix du choc on trouvera la vitesse communiquée

par le premier corps a au second $t = \frac{2ac}{a+t}$, celle que donne celui-ci au troisième $u = \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$

& ainsi de suite; donc la vitesse que recevra le dernier b sera exprimée par $\frac{2catuxy \dots \dots \dots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y) \dots \dots \dots}$

expression qui doit devenir un *maximum*. Pour en trouver plus aisément la différentielle, qu'on la suppose $= Z$, & prenant les logarithmes d'une part, & de l'autre on trouvera $l2ca + lt + lu + lx + ly + \&c. - l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) - \&c. = lZ$ ce qui

donne par la différentiation $\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \&c. - \frac{da}{a} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} - \&c. = \frac{dZ}{Z}$; d'où en mettant ensemble, & réduisant au même dénominateur les

les termes affectés des mêmes différentielles l'on tire dZ

$$= \frac{Z(au - t^2)dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx - u^2)du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy - x^2)dx}{x(u+x)(x+y)} + \&c.$$

On aura donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum* les équations suivantes $au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$ &c. qui donnent les analogies $a:t = t:u$, $t:u = u:x$, $u:x = x:y$ &c., savoir $\therefore a:t:u::x:y::\dots b$; d'où l'on voit que toutes les masses doivent constituer une progression géométrique, dont les deux extrêmes sont les données a & b . Pour juger à présent du *maximum*, ou *minimum* soit fait d'abord pour abréger $\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} =$

α ; $\frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta$; $\frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma$ &c. on aura
 $p = \alpha(au - t^2)$; $q = \beta(tx - u^2)$; $r = \gamma(uy - x^2)$ &c. donc $dp = (au - t^2)d\alpha + \alpha(adu - 2tdt)$; $dq = (tx - u^2)d\beta + \beta(xdt + tdx - 2ud u)$; $dr = (uy - x^2)d\gamma + \gamma(ydx + udy - 2xdx)$ &c. Or comme les termes a, t, u, x, y &c. doivent être en progression continue si l'on nomme $1:m$ la raison constante d'un antécédent quelconque à son conséquent on trouve $t = ma$, $u = m^2a$, $x = m^3a$, $y = m^4a$, &c.; de plus $\beta = \frac{\alpha}{m^2}$

$\gamma = \frac{\alpha}{m^4}$ &c., lesquelles valeurs substituées dans les expressions précédentes les réduiront à $dp = \alpha a(du - 2mdt)$;

$$dq = \alpha a \left(dt - \frac{2du}{m} + \frac{dx}{m^2} \right); \quad dr = \alpha a \left(\frac{du}{m^2} - \frac{2dx}{m^2} + \frac{dy}{m^4} \right); \& \text{ ainsi des autres. On aura}$$

donc $A = -2m\alpha a$; $B = \alpha a$; $C = -\frac{2\alpha a}{m}$; $D = 0$; $E = \frac{\alpha a}{m^2}$; $F = -\frac{2\alpha a}{m^2}$; $G = 0$; $H = 0$; $I = \frac{\alpha a}{m^4}$ &c.

On

On voit par là en premier lieu que A est négatif, & que par conséquent la proposée doit être un *maximum* si les autres conditions se trouvent remplies. Or $AC = 4a^2a^2$, & $B^2 = a^2a^2$ donc $1^{\text{mo}} AC > B^2$; $AC - B^2 = 3a^2a^2$
 $FA - D^2 = \frac{4a^2a^2}{m^2}$; $EA - BD = -\frac{2a^2a^2}{m}$, donc

$$(AC - B^2)(FA - D^2) = \frac{12a^4a^4}{m^2}, \text{ \& } (EA - BD)^2 = \frac{4a^4a^4}{m^2}, \text{ \& par conséquent } 1^{\text{de}} (AC - B^2)(FA - D^2)$$

$> (EA - BD)^2$. S'il n'y a que deux masses intermédiaires t & u , il suffit d'avoir égard à la première de ces conditions, s'il y en a trois il faut encore considérer la seconde; s'il y en avoit plusieurs autres il faudroit avoir recours à autant de conditions qu'il y a de variables. Au reste dans ce problème on les trouvera toutes remplies, si on veut bien prendre la peine de pousser plus loin le calcul; de sorte qu'on peut franchement assurer, que lorsque les masses intermédiaires quel que soit leur nombre sont telles qu'elles forment une progression géométrique entre les deux extrêmes données, la vitesse que reçoit la dernière par leur moyen est toujours la plus grande possible. Ce problème a été traité par Mr. Huguens le premier, & depuis par beaucoup d'autres Géomètres; mais sans avoir aucunement égard aux nouvelles déterminations, que nous avons cependant trouvées nécessaires pour s'assurer de l'existence du *maximum*, ou *minimum*.

16. Soit l'équation générale pour les surfaces de second ordre $z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$, qu'on se propose de trouver le point où l'ordonnée z est la plus grande, ou la plus petite; on aura en différentiant $2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy$ ce qui fournit d'abord les deux équations suivantes $ax + by = \frac{e}{2}$; $cy + bx = \frac{f}{2}$, d'où l'on tire

$x =$

$$x = \frac{ec - fb}{2(ac - b^2)}; y = \frac{eb - fa}{2(ac - b^2)} . \quad \text{Différentions de}$$

nouveau la différentielle trouvée, & on aura, puisque $d\zeta = 0$, $2\zeta d^2\zeta = 2ad^2x^2 + 4bdxdy + 2cdy^2$ où les quantités x, y ne se trouvent plus. Or afin que l'ordonnée ζ soit un vrai *maximum*, ou *minimum*, il faut que a & c soient toutes deux négatives dans le premier cas, & toutes deux positives dans le second, de plus il faut encore que $ca > b^2$, car sans cela les valeurs trouvées pour les ordonnées x & y ne donneroient jamais ni un *maximum*, ni un *minimum*; en effet toutes les fois que ca n'est pas plus grand que b^2 ; le célèbre Mr. Euler a démontré par une autre voie dans l'appendice à l'introduction à l'Analyse des infiniment petits, que la surface proposée s'étend à l'infini, & qu'elle a une asymptote conique. Il paroît donc clairement que la méthode pour déterminer les *maximum* & *minimum*, quand il y a plusieurs variables en ne les regardant qu'une à la fois, peut souvent être très-fautive. Car par exemple dans le cas précédent, en traitant d'abord x comme variable, on trouve la différentielle première $2(ax + by - \frac{1}{2})dx$, & la seconde $2adx^2$; de même en faisant varier y on a pour la différentielle première $2(cy + bx - \frac{1}{2})dy$, & pour la seconde $2cdy^2$. Or les deux différentielles premières posées $=$ à zero donnent les mêmes équations qu'on a trouvé, & les deux secondes font voir que si a & c sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives l'ordonnée ζ est un *maximum*, ou un *minimum*, si on a simplement égard à la variabilité des x & y considérées séparément; mais on n'est pas en droit de conclure pour cela que ζ soit un *maximum*, ou un *minimum*, par rapport à toutes deux ensemble, comme on vient de le voir.

Sur

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. **S**OIT proposée l'équation différentielle $dy + yXdx = Zdx$, où X & Z expriment des fonctions quelconques de la variable x ; l'on fait que pour intégrer cette équation, il suffit de faire $y = u\zeta$, ce qui donne $u d\zeta + \zeta du + u\zeta Xdx = Zdx$, où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de u , ou de ζ . Supposons donc $\zeta du + u\zeta Xdx = 0$, & divisant par ζ , l'on aura $du + uXdx = 0$, & par conséquent $\frac{du}{u} = -Xdx$, & $lu = -\int Xdx$, savoir $u = e^{-\int Xdx}$, ou e est le nombre, dont le logarithme hyperbolique est 1. Par cette supposition la proposée deviendra $u d\zeta = Zdx$, ce qui donne $d\zeta = \frac{Zdx}{u}$; $\zeta = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, & enfin $y = u\zeta = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$.

2. En observant le procédé de cette méthode, on verra aisément qu'elle doit pouvoir s'appliquer encore avec succès aux équations différentielles qui ont la même forme que la précédente, quoique les différences soient supposées finies. Soit donc l'équation $dy + My = N$, dont la différentielle dy soit finie, & les autres quantités M & N soient des fonctions d'une autre variable quelconque x . Supposons en premier lieu $y = uz$, & l'on aura dans ce cas $dy = u dz + z du + du dz$, & l'équation se changera en $u dz + z du + du dz + Mu z = N$. Qu'on pose comme ci-dessus les deux ter-

e
mes

mes $z du + Mu z = 0$, & on aura $du + Mu = 0$,
 savoir $\frac{du}{u} = -M$; pour résoudre cette équation dans
 notre cas où la différentielle du n'est pas infiniment pe-
 tite, qu'on suppose $u = e^t$, & l'on aura $u + du =$
 $e^t + e^t dt$; & $du = e^t (e^{dt} - 1)$; d'où $\frac{du}{u} = e^{dt} - 1 = -M$;
 $e^{dt} = 1 - M$, & prenant les logarithmes $dt = l(1 - M)$,
 & ensuite intégrant $t = \int l(1 - M)$; mais l'on fait que
 la somme des logarithmes de plusieurs nombres est égale
 au logarithme du produit de tous ces nombres; donc si
 l'on exprime généralement par $\pi \cdot (1 - M)$ le produit
 continuuel de toutes les quantités contenues dans la for-
 mule $1 - M$, on aura $t = l\pi \cdot (1 - M)$, & par consé-
 quent $u = e^t = \pi \cdot (1 - M)$. Par l'évanouissement
 de ces deux termes l'équation devient $u d\zeta + du d\zeta = N$,
 d'où l'on tire $d\zeta = \frac{N}{u + du}$, & en intégrant $\zeta =$

$\int \frac{N}{u + du}$. Mais ayant déjà trouvé $u = \pi \cdot (1 - M)$;
 si l'on exprime par M^1 le terme consécutif à M on aura
 $u + du = \pi \cdot (1 - M^1)$, & par conséquent $\zeta =$
 $\int \frac{N}{\pi \cdot (1 - M^1)}$; & puisque $y = \zeta u$, $y = \pi \cdot (1 - M) \times$
 $(\int \frac{N}{\pi \cdot [1 - M^1]})$, ou bien en ajoutant à cette intégra-
 tion une constante quelconque A ; $y = \pi \cdot (1 - M) \times$
 $(A + \int \frac{N}{\pi \cdot [1 - M^1]})$.

3. Soit à présent proposée l'équation $y' = Ry + T$,
 où y' est le terme qui suit y dans la suite des y ; puis-
 que $y' = y + dy$ elle se réduira à $dy + (1 - R) \times$
 $y = T$. Qu'on fasse donc $1 - R = M$; $T = N$, &
 l'on trouvera pour la valeur de y l'expression suivante
 $ly = \pi \cdot R \cdot (A + \int \frac{T}{\pi \cdot R})$. Si R est une quantité con-

stante,

stante, il est clair que $\pi.R$ & $\pi.R^2$ deviennent des puissances de R , donc l'exposant est égal au nombre qui dénote la place des termes y , & y' dans la suite des y ; soit donc m ce nombre, de sorte que y^m soit le même que y , & on aura $y^m = R^m (A + \int \frac{T}{R^{m+1}})$. Si T est

constant $\int \frac{T}{R^{m+1}}$ est $= T \int \frac{1}{R^{m+1}}$, où les termes exprimés

par $\frac{1}{R^{m+1}}$ forment une progression géométrique, dont il sera aisé d'avoir la somme; soit cette somme qui com-

mence par $\frac{1}{R} = S$, savoir que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \&c.$

$+ \frac{1}{R^m} = S$, & on aura, en multipliant par R , $1 +$

$\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \&c. + \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}$ de

cette égalité l'on tirera $S = \frac{R^m - 1}{R^m[R - 1]}$, par conséquent

$y^m = R^m (A + T \frac{R^m - 1}{R^m[R - 1]})$, ou bien $y^m = AR^m +$

$T \frac{R^m - 1}{R - 1}$.

4. Pour se convaincre que cette valeur de y satisfait entièrement aux conditions de l'équation donnée $y' =$

$Ry + S$, ou bien $y^{m+1} = Ry^m + S$, on n'a qu'à

multiplier la formule trouvée pour y^m par R , & lui ajouter

la quantité T , & l'on trouvera le résultat $AR^{m+1} +$

$T \frac{R^{m+1} - R}{R - 1} + T$ qui se réduit à $AR^{m+1} + T \frac{R^{m+1} - 1}{R - 1}$

qui est la valeur que la formule générale nous donne pour le terme y^{m+1} .

5. Après avoir trouvé la méthode d'intégrer toute équation différentielle à différences finies, comprise sous la

forme générale $dy + My = N$, l'on pourra de même procéder à l'intégration des autres qui dépendent de celle-ci. Or Mr. D'Alembert dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin a fait voir, que toutes les équations différentielles, telles que

$$y + \frac{A dy}{dx} + \frac{B d^2 y}{dx^2} + \frac{C d^3 y}{dx^3} + \&c. = X \text{ où } A, B, C \&c.$$

sont des constantes quelconques, & où X est une fonction quelconque de x , se réduisent à une équation de cette forme $z + \frac{H dz}{dx} = V$, où H est une constante, & V

une fonction de x ; laquelle équation est la même que nous avons appris à intégrer dans le cas même des différences finies. Si donc le procédé de Mr. D'Alembert peut avoir lieu aussi quand les différences sont finies, l'on pourra intégrer encore dans cette circonstance tout équation différentielle de cette forme $y + A dy + B d^2 y + C d^3 y + \&c. = X$, & par conséquent l'équation $y' + P y'' + Q y''' + \&c. = X$, qu'on peut regarder comme la formule générale des suites récurrentes. La méthode de Mr. D'Alembert se trouve détaillée dans le second tome du Calcul intégral de Mr. Bougainville; mais pour épargner de peine aux Lecteurs je tâcherai de la développer ici en peu de mots. Qu'on suppose $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$,

$\frac{dq}{dx} = r$ &c., & l'équation proposée se changera en y

$$+ Ap + Bq + \frac{C dq}{dx} = X. \text{ Qu'on multiplie à présent chacune des équations qu'on a supposé par des coé-} \\ \text{ficients indéterminés } a, b, c \&c., \& \text{ qu'on les ajoute} \\ \text{toutes à celle-ci; on aura } y + (A+a)p + (B+b)q. \\ - \frac{a dy}{dx} - \frac{b dp}{dx} + \frac{C dq}{dx} = X. \text{ Soit fait enforte que la}$$

pre-

première partie du premier membre de cette équation devienne un multiple exact de l'intégral de la seconde, savoir que $dy + (A+a) dp + (B+b) dq = dy + \frac{b dp}{a} - \frac{C dq}{a}$, & en comparant terme à terme il en resul-

tera $A+a = \frac{b}{a}$; $B+b = -\frac{C}{a}$; de ces deux équations

l'on tire $b = -\frac{C}{a} - B = aA + a^2$, & $a^3 + Aa^2 + aB + C = 0$, dont les racines donneront trois valeurs d' a qui satisfairont également aux conditions requises.

Supposons maintenant $y + (A+a)p + (B+b)q = z$, l'équation trouvée deviendra $z - \frac{a dz}{dx} = X$, laquelle comparée avec celle du §. 1. donnera en intégrant

$z = e^{ax} \int \frac{X}{a e^{ax}} dx$. Or comme la quantité a peut avoir trois valeurs différentes, nommons les a^1, a^1, a^1 , & exprimons par Z^1 la valeur de z qui contient a^1 , par Z^1 celui qui contient a^1 , & par Z^1 celui qui contient a^1 ; on aura donc les trois équations suivantes;

$$y + (A+a^1)p + (B+b^1)q = Z^1$$

$$y + (A+a^1)p + (B+b^1)q = Z^1$$

$$y + (A+a^1)p + (B+b^1)q = Z^1$$

De ces trois équations on tirera la valeur de y , laquelle à cause des quantités constantes A, B, a^1, a^1 &c. se réduira à cette forme $y = FZ^1 + GZ^1 + HZ^1$, où F, G, H sont des constantes; dont la valeur dépend des autres A, B, a^1, a^1 &c.

6. Si l'on examine le procédé de cette méthode il paroitra clairement que si l'équation eut contenu beaucoup plus de termes, par exemple qu'elle eut été

$$y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bd^2y}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \frac{Dd^4y}{dx^4} + \frac{Ed^5y}{dx^5} + \&c. = X$$

l'on auroit trouvé de même $y = FZ^I + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^V$, où les quantités $Z^I, Z^{II}, &c.$ sont des fonctions de X & x , telles que

$Z = e^{ax} \int \frac{X}{ae^{ax} - a}$, en posant pour a les racines $a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V$ de cette équation $a^I + Aa^I + Ba^I + Ca^I + Da + E = 0$; de plus l'on s'apercevra que les opérations que requiert cette méthode peuvent également se faire, soit que les différences soient finies, ou qu'elles soient infiniment petites.

7. Ayant donc l'équation à différences finies $y + A dy + B d^2 y + C d^3 y + D d^4 y + E d^5 y = X$, & posant $dy = p, dp = q, dq = r, dr = f$, l'on parviendra de la même manière à une équation telle que $z - a dz = X$, où $z = y + (A + a)p + (B + b)q + (C + c)r + (D + d)f$, & la quantité a dépendra de cette équation $a^I + Aa^I + Ba^I + Ca^I + Da + E = 0$, dont les racines ont été déjà supposées $a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V$. Que l'on compare à présent l'équation $z - a dz = X$, avec celle du §. 2., savoir $dy + My = N$, & on aura $M = -\frac{1}{a}$; $N = -\frac{X}{a}$; par conséquent

$1 - M = \frac{1+a}{a}$, ce qui donne enfin $z = \pi. \left(\frac{1+a}{a} \right) X$ [const. + $\int \frac{X}{a}$: $\pi. \left(\frac{1+a}{a} \right)$], ou bien puisque a est

constant $z^n = \left(\frac{1+a}{a} \right)^n. \left(\text{const.} - \int \frac{X a^n}{[1+a]^{n+1}} \right)$; m exprimant comme ci-dessus le quantième du terme z dans la série des z . Si l'on fait de plus X constant on aura en prenant la somme de la progression géométrique exprimée par $\int \frac{a^n}{[1+a]^{n+1}}$; $z^n = \left(\frac{1+a}{a} \right)^n \times \left(\text{const.} - X. \frac{(1+a)^n - a^n}{[1+a]^n} \right)$.

Or comme a peut avoir les valeurs $a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V$ il est clair

clair qu'en substituant chacune d'elles dans la formule trouvée, il en résultera autant de valeurs de z^n qui satisfieront toutes également. Soient donc toutes ces valeurs exprimées par $Z^i, Z^{ii}, Z^{iii}, Z^{iv}, Z^v$, & puisque $z = y + (A+a)p + (B+b)q + (C+c)r + (D+d)s$, l'on tirera par le moyen des cinq équations $z = Z^i, z = Z^{ii}, z = Z^{iii}, z = Z^{iv}, z = Z^v$, l'expression suivante de y , savoir $y = FZ^i + GZ^{ii} + HZ^{iii} + IZ^{iv} + KZ^v$.

8. Soit enfin proposée l'équation $y^i + Ay^{ii} + By^{iii} + Cy^{iv} + Ec. = X$, où y^i, y^{ii}, y^{iii} &c. expriment des termes consécutifs de la suite des y ; il est d'abord évident que, puisque $y^{ii} = y^i + dy^i$; $y^{iii} = y^i + 2dy^i + d^2y^i$, & ainsi des autres, cette équation peut être ramenée à la forme de celle que nous venons d'examiner; mais puisque le Calcul devient de cette façon trop long, il sera utile de la résoudre directement par les mêmes principes que nous avons employés jusqu'ici. De plus afin de pouvoir plus aisément appliquer cette équation aux séries récurrentes, il sera mieux de considérer les termes y^i, y^{ii}, y^{iii} &c. dans un ordre renversé, savoir que $y^{ii} + dy^{ii} = y^i$; $y^{iii} + dy^{iii} = y^{ii}$, & ainsi des autres, de sorte que les exposans i, ii, iii &c. dénotent la distance de chaque terme au dernier y^i . Supposons $y^{ii} = p^i$, & l'on aura $y^{iii} = p^{ii}$, soit donc de nouveau $p^{ii} = q^i$ & $p^{iii} = q^{ii}$; soit encore $q^{ii} = r^i$ & $q^{iii} = r^{ii} = f^i$, & l'on aura $y^{iv} = p^i$; $y^{v} = q^i$; $y^{vi} = r^i$; $y^v = f^i$, $y^{vi} = f^{ii}$; substituant ces valeurs dans la proposée, elle deviendra $y^i + Ap^i + Bq^i + Cr^i + Df^i + Ef^{ii} = X$. Qu'on réduise à présent les suppositions précédentes en équations, savoir $p^i - y^{ii} = 0$; $q^i - p^{ii} = 0$; $r^i - q^{ii} = 0$; $f^i - r^{ii} = 0$, & après les avoir multipliées par les coefficients indéterminés a, b, c &c. qu'on les ajoute toutes à celle qu'on vient de trouver. Il en résultera

fultera la suivante $y^1 + (A+a)p^1 + (B+b)q^1 + (C+c)r^1 + (D+d)f^1 - ay^{11} - bp^{11} - cq^{11} - dr^{11} - Ef^{11} = X$. Qu'on fasse maintenant que chaque coéefficient de la première partie soit multiple de la même manière de son correspondant dans la seconde, & l'on parviendra aux mêmes équations qu'on a trouvé §. 6., & la quantité a sera déterminée par l'équation $a^1 + Aa^1 + Ba^1 + Ca^1 + Da + E = 0$, dont on a supposé les racines a^1, a^{11}, a^{111} &c. Donc si l'on fait $y^1 + (A+a)p^1 + (B+b)q^1 + (C+c)r^1 + (D+d)f^1 = z^1$ l'équation se réduira à $z^1 - az^{11} = X$, qui par une intégration semblable à celle du §. 3. donnera

$z^m = a^m \left(\text{const.} + \int \frac{X}{a^m + 1} \right)$, où m exprimera le quantième du terme z^m dans la suite des z . Or comme pour a l'on peut substituer chacune des cinq racines a^1, a^{11}, a^{111} &c. de l'équation $a^1 + Aa^1 + E = 0$, l'on aura de même cinq valeurs différentes de z^m que nous exprimerons comme ci-dessus par Z^1, Z^{11}, Z^{111} &c.; donc à cause que $z^m = y^m + (A+a)p^m + (B+b)q^m + (C+c)r^m + (D+d)f^m$, l'on parviendra en chassant les lettres p^m, q^m &c. à la formule $y^m = FZ^1 + GZ^{11} + HZ^{111} + IZ^{1111} + KZ^1$, où F, G, H &c. sont des constantes qu'on doit puis déterminer par la comparaison d'autant de termes donnés dans la suite des y .

9. Si X est constant, par ce qu'on a démontré §. 4. la somme exprimée par $\int \frac{X}{a^m + 1}$ deviendra $= X \frac{a^m - 1}{a^m[a - 1]}$; & nommant L la constante ajoutée à cette intégration, on aura finalement $Z = La^m + X \frac{a^m - 1}{a^m[a - 1]}$, d'où l'on tirera par conséquent les autres valeurs Z^1, Z^{11}, Z^{111} &c. en substituant à la place de a ses valeurs a^1, a^{11}, a^{111} &c.

10. De tout ceci l'on peut déduire le théorème général suivant; si l'on a l'équation

$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5} + \&c. = X$, où les exposans des y dénotent leurs places; que l'on cherche toutes les racines $a^1, a^{11}, a^{111}, a^{1v} \&c.$ de l'équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, & l'on aura généralement

$$y^m = F a^{1^m} \left(L + \int \frac{X}{a^{1^m+1}} \right) + G a^{11^m} \left(L + \int \frac{X}{a^{11^m+1}} \right) + \\ H a^{111^m} \left(L + \int \frac{L}{a^{111^m+1}} \right) + I a^{1v^m} \left(L + \int \frac{X}{a^{1v^m+1}} \right) + \\ K a^{v^m} \left(L + \int \frac{X}{a^{v^m+1}} \right) + \&c.$$

& dans le cas, où X est constant.

$$y^m = L (F a^{1^m} + G a^{11^m} + H a^{111^m} + I a^{1v^m} + K a^{v^m} + \&c.) \\ + X \left(F \frac{a^{1^m}-1}{a^1-1} + G \frac{a^{11^m}-1}{a^{11}-1} + H \frac{a^{111^m}-1}{a^{111}-1} + \right. \\ \left. I \frac{a^{1v^m}-1}{a^{1v}-1} + K \frac{a^{v^m}-1}{a^v-1} + \&c. \right).$$

Si $X=0$ l'on pourra

$$\text{supprimer la constante } L, \text{ \& on aura plus simplement}$$

$$y^m = F a^{1^m} + G a^{11^m} + H a^{111^m} + I a^{1v^m} + K a^{v^m} \&c.$$

formule connue pour l'expression du terme général de la suite des y , telle que

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5} + \&c. = 0;$$

ce qui n'est autre chose qu'une suite récurrente, dont l'échelle de relation est $-A - B - C - D - E - \&c.$

11. Voilà donc la théorie des suites récurrentes réduite au calcul différentiel, & établie de cette façon sur des Principes directs & naturels au lieu que jusqu'ici elle n'a été traitée que par de voies tout-à-fait indirectes. De plus les recherches qu'on a fait sur cette matière, ont toujours été bornées au cas de $X=0$; & personne que je sache n'a jamais entrepris d'examiner généralement les autres cas, où X est constant, ou même variable, ce qui

f

peut

peut néanmoins être de la dernière importance pour la résolution de plusieurs problèmes qui conduisent à de telles équations, dont la doctrine des hazards est principalement remplie, comme je me propose de le faire voir une autre fois, en appliquant à cette espèce de calcul la théorie que je viens d'expliquer.



DISSERTATIO.

Magnetica phaenomena ad electrica pertinere etiam ante inventam electricitatis theoriam ingeniosi Viri conjectarunt, quod utrimque attractionis motus, & repulsionis observarent, atque adeo analogia ducti ex eodem fluido excitari arbitrarentur, quod in electricis quidem in sensus incurreret, in magneticis autem occulte actionem suam exerceret: quae porro opinio, etsi ab aliis, iisque Clarissimis Viris impugnata fuerit, nuper tamen per immortalia electrica inventa restituta est, ac illustrata. Cum in eam rem meditarer, nonnulla occurrebant, quae ut analogiam magnetici, & electrici fluidi confirmare, ita identitatem dubiam reddere posse videbantur, quae quamquam obvia sunt, cum tamen magna ex parte haecenus non sint animadversa paullo fufius exponenda esse duxi.

1. Corpora inaequaliter electrica se attrahunt, aequaliter se repellunt, eodem modo poli magnetici diversi nominis se attrahunt, ejusdem se repellunt (a).

2. Motus electrici non contingunt, nisi corpora actu electrica fuerint *insulata*, magnetici motus perpetuo contingunt, ergo magnes perpetuo *insulatus* est.

3. Corpora actu electrica movent corpora deferentia, seu eadem attrahunt, magnes ferrum attrahit; ergo ferrum est instar corporis deferentis.

4. Prae-

f 2

(a) Observante Cl. D. Alibardo in addit. ad FrancKlini epist. t. 2. p. 208.

4. Praeterea magnes in ferrum agit ad ingentem distantiam, si ferrum aliud teres, nec nimis magnum fuerit interpositum, eodemque demto ad tantam distantiam magnetis actio non amplius extenditur; ergo si magnes tamquam corpus consideretur electricum fluidum emittens, vel recipiens, ferrum considerari poterit tamquam corpus deferens; atque ideo magnes est instar globi vitrei emittentis, vel resinosi recipientis, ferrum est instar catenae transmittentis.

5. Hoc tamen discrimen intercedit, quod globus vitreus, vel resinofus electricum fluidum non recipiat, aut emittat, nisi fricetur, magnes quocumque tempore absque ulla praeparatione recipiat, & emittat.

6. Melius itaque comparari poterit cum metallo electrico aëri exposito, quod perpetuo electricum est ob majorem metalli respectu electrici fluidi, quam aliorum corporum permeabilitatem, ob quam electricum fluidum in minus resitens metallum, faciliusque permeabile continuo fertur: corpora adeo omnia, quibus magnes insistere potest perfecte non coërcent magneticum fluidum, sed tantummodo minus facile ab eodem permeantur, quam ferrum, aut alius magnes; praeterea vero corpora deferentia electricum fluidum illud ad remotissima intervalla transferre possunt, si corporibus rite coërcentibus confinia sint; ferrum magneticum fluidum, nonnisi per certum intervalum deferit sensim debilius (*b*). Ergo nec ferrum perfecte deferens, nec reliqua corpora perfecte coërcentia sunt.

7. Si corporibus deferentibus corpora actu electrica contigua fiant, electricum fluidum per ipsa distribuitur, & eorum vis electrica hebescit. Eodem modo ingens ferri
 massa

(*b*) Actio enim magnetis, quae per interpositum ferrum propagatur, aucta distantia per gradus minuitur. Muschem. *dis. de magni exp.* §1. p. 112. Ex hoc fere fonte reliqua hausi, quae ad magneticorum phaenomenorum historiam spectant.

massa magneti propinqua ipsius actionem in admotum ferrum imminuit, aut etiam extinguit.

8. Ex hac porro explicatione intelligitur, cur ferrum interpositum, quod actionem magnetis ad majora intervalla extendit, si sit exiguum (4), si ingens sit, eandem tollat, quod postremum quibusdam Physicis imposuerat, putantibus ideo ferrum magnetis actionem intercipere ex eo, quod magneticum fluidum difficiliter per ipsum permearet (c). Enim vero non ideo intercipit actionem, quod difficiliter permeari possit, sed quod facilius permeabile, si ingens sit, fluidum magneticum retineat, & *insulationem* auferat, non secus ac corpora electricum fluidum deferentia corporibus actu electricis contigua, si ingentia sint *insulationem* tollunt, & electricos motus extinguunt. Ex his intelligi potest, cur magnes albi ferri laminae applicitus, ferri limaturam in ipsius margine positam non attrahat, si lamina ampla sit, sin autem sit angusta, ad eam distantiam commoveat, ad quam demta lamina commovere nullatenus potuisset; cur item scobs ferri albi ferri folio superposita a magnete ad oppositam folii superficiem admoto eo validius commoveatur, quo folium fuerit arctius.

9. Ut autem eo evidentius pateret ferrum non minus, quam reliqua corpora magnetico fluido permeari sequens experimentum institui. Acum ferream ex praelongo filo ferreo suspendi, dein ense ad apicem magnetismo imbutum ad eandem admovi, & aequae vividas acus motiones observavi, ac quando alio corpore acus sustentabatur; quo in experimento, quum acus ferro fulciretur, & apex ensis magnetismo imbutus cum ense reliquo magnetismo destituto continuaretur; luculenter constat utrumque corpus optime *insulatum* futurum fuisse; ac proinde motum nullum fuisse secuturum, siquidem ferrum magneticum fluidum
coër-

(c) Vid. Mémoir, de l'Acad. 1733.

coërceret, caeterum respectu magnetici fluidi ferrum vices praestare corporis deferentis evidentius constabit inferius, ubi de armatura magnetis sermonem habebo.

10. Corpora electrica se attrahunt, quando ex his alterum fluidum electricum emittit, alterum recipit, se repellunt, quando vel utrumque emittit, vel utrumque recipit, nempe se attrahunt, quando eadem directione per ipsa fluidum electricum movetur; se repellunt, quando movetur directione opposita. Quoniam igitur poli magnetici ejusdem nominis se repellunt, nominis diversi se attrahunt horum unum magneticum fluidum recipere, alterum emitte- re censendum est; inde intelligitur cur electrica corpora se non repellant, nisi aequaliter electrica fuerint; contra poli ejusdem nominis se repellant, etsi inaequalem habuerint magnetismum; nempe in corporibus electricis, ut contraria sit electrici vaporis directio, non sufficit, ut eodem modo sint electrica, sed praeterea necesse est, ut sint electrica aequaliter, contra in polis magneticis sufficit, ut sint ejusdem nominis, ut contraria quoque sit magnetici fluidi directio.

11. Electrica porro corpora postquam se attraxerunt, se repellunt, quod cum prius horum alterum ex altero electricum fluidum reciperet, paullo post aequaliter electrica facta, vel ambo recipiunt, vel ambo emittunt. Contra magnes constanter ferrum attrahit, & polus magneticus polum item diversi nominis constanter attrahit, ejusdem constanter repellit. Ergo per magnetem, & ferrum constanter eadem directione magneticum fluidum movetur, tum etiam per polos diversi nominis, per polos ejusdem nominis diversa (*).

12.

(*) Lex illa motuum electricorum, quod corpora inaequaliter electrica se attrahant, aequaliter electrica se repellant eatenus vera est, quatenus fluidum electricum per corpora communicatione electrica ad aequalitatem distribuitur, ac proinde, quando bina corpora aequaliter electrica facta sunt ab uno in alterum fluere desinit, sed vel in utraque ingredi, vel

12. Propterea polus unus magnetis constanter magneti- cum fluidum recipit, alter constanter emittit, non se- cus, ac in electricis machina vaporem recipit, catena emit- tit, vel contra, quamdiu globus circumducitur.

13. Quemadmodum igitur in electricis, sic in magne- tics, nulla necessitas duplicis fluidi affluentis, & effluen- tis, quale a Cartesio fuerat propositum (d).

14. In locis reliquis magnetis extra polos, quoniam vis magnetica exigua est per eadem, nonnisi exigua quantita- te magneticum fluidum movetur, atque adeo a polo ad polum fertur; inde autem intelligitur cur si transversim magnes secetur, plana, quae sectione gignuntur polos di- versi nominis exhibeant (e); cum etenim ex uno in al- terum magneticum fluidum ante sectionem moveretur, etiam post sectionem planum unum magneticum fluidum emittet, alterum recipiet, ac propterea tamquam poli di- versi

ab utrisque egredi nititur pro ut positivam, vel negativam habuerint electricitatem: at si quaestio sit de motibus inter corpora deferentia, & coërcencia sibi invicem admota, quoniam in his lex illa aequabilis distri- butionis non obtinet, nec etiam ea motuum regula obtinebit. Vitrum tenue, aut talsi folium ex serico filo pendulum, ita admoveo corpori metallico catenae electricae adnexo, ut plana vitri superficies ejus cor- poris superficiei obvertatur ad aliquot pollicum distantiam. In eadem distantia ad oppositam vitri faciem colloco corpus deferens cum solo communicans: vibrat vitrum inter catenam, & corpus deferens oppo- situm; nempe dum superficies vitri catenae obversa electricum vaporem recipit, vitrum ad catenam fertur, dum opposita vitri superficies aequa- lem vaporis quantitatem exonerat in adpositum deferens corpus versus illud movetur. Apicem metallicum corpori huic substituo, ut ad majo- rem distantiam electricum fluidum haurire possit ex vitri superficie, vi- trum constanter adhaeret corpori catenae adnexo; dum enim apex me- tallicus eo una vitri superficie vaporem haurit, ex catena in oppositam superficiem idem vapor fluere pergit, ex quo vaporis ex uno corpore, in alterum corpus constanti fluxu adhaesio illa constans producitur: ergo superficies vitri ad catenam conversa aequaliter, imo magis ele- ctrica evadit quam catena ipsa, & tamen catenae constanter adhaeret, quando constans est electrici vaporis ex catena in illam superficiem efflu- xus. En igitur etiam in electricis exemplum adhaesionis constantis ad similitudinem magneticae attractionis.

{d} Confer Regnault entretien 15. n. 3. 6.

{e} Muschenb. diss. de magn. exp. 83. pag. 139.

versi nominis erunt spectanda (11): sin autem plano ad axim parallelo magnes secetur, extrema, quae prius cohaerebant, se repellent, quod poli ejusdem nominis remaneant (f).

15. Quoniam ferrum a polis diversi nominis aequè attrahitur, necesse est, ut a polo fluidum emittente idem accipiat, & ad polum recipientem idem traducat, ut adeo aequali facilitate quacumque directione a fluido magnetico possit permeari.

16. Ferrum porro ex magnetis contactu, multo magis ex magnetici poli juxta ipsius longitudinem ductu, magneticum evadit, etiam si pannus hoc inter, & magnetem fuerit interpositus (g). Ergo ubi semel per ipsum certa directione magneticum fluidum moveri coepit, eandem deinceps affectare pergit. Inde fit, ut qua parte ferrum magneticum polum tangit, diversi nominis polum acquirat (h); si polo debilioris magnetis aptetur polus diversi nominis magnetis validioris, illius virtus augeatur (i), si polus ejusdem nominis debilitetur, destruat, in contrariam mutetur (K), ut demum magnetici poli ejusdem nominis vim suam ex vicinia perpetuo imminuant, nominis diversi servant, adaugeant in ratione aliqua distantiarum inversa (l).

17. Quod autem diximus ferrum quacumque directione aequè facile a magnetico fluido permeari (15), magnetem nonnisi certa directione (11), ulterius comprobatur, observando polum magneticum, qui ex validiore polo ejusdem nominis in contrarium mutatur (16), antequam mutetur, omnem magnetismum amittere, ac proinde in ferri conditionem redigi: cum igitur simplicis ferri conditio sit veluti gradus, quo

(f) Id. l. c. exp. 80. pag. 140.

(g) Muschenb. l. c. pag. 100.

(h) Rohaul. pag. 244. n. 8. Muschenb. exp. 89. pag. 141.

(i) Muschenb. l. c. exp. 89. pag. 141.

(K) Muschenb. l. c. exp. 119. pag. 243.

(l) Encyc. ex Mitchelio, Article aimant.

quo a polo uno in contrarium fit transitus, quando contrarias directiones magneticum fluidum affectat (10), necesse est, ut ferrum ipsum indifferens sit ad utramque; atque adeo ad quamcumque magnetici fluidi directionem. Praeterea vero ferrum magnetismo imbutum, & magnes ipse diuturna ignitione vim attrahendi amittunt (*m*), & vim directivam, aut nullam, aut exiguam retinent (*n*), cum tamen postquam refrigerata fuerint aequae valide a magnete alio attrahantur (*o*), quod nempe vi ignis, magnete, & ferro mollioribus factis fluidum magneticum aequae facile quacumque directione aditum sibi compareret, sicque ipsa (si satis diuturna fuerit ignitio) in merum ferrum redigat, quod attrahi quidem a magnete possit, ferrum vero aliud attrahere non possit, sin autem ignitio breviori tempore perduret, tum frige facta vim duntaxat aliquam attractivam servabunt, quae jugi magnetici fluidi juxta pristinam directionem fluxu augeri poterit, ac reparari (*p*): magnetem vero, & ferrum ex igne mollia magnetico fluido quavis directione in ipsa incurrenti facilius cedere, quam si frigida fuerint experimenta alia inferius adducenda comprobabunt.

18. Corpora contrario modo electrica ad majorem distantiam in se agunt, quam in corpora deferentia electricitate destituta (*q*). Ita ferrum magnetismo imbutum ad

g

ma-

(*m*) Muschenb. *dis. cit. exp. 29. pag. 71. 72.* magnetem, qui per sex horas canduerat, nequidem scobis ferri particulam elevare potuisse, & Boyleus apud eundem *pag. 262.*

(*n*) Magnes modo dictus in Muschenb. *exp. acum mobilissimam sex pollic. longam nonnisi ad distantiam $\frac{1}{2}$ polli attrahebat, ac repellebat; ferrum ignitum minorem adhuc vim directivam ostendebat exp. 131. pag. 234.*

(*o*) De magnet. *conf. exp. cit.*, de ferro autem dum candet minori vi a magnete attrahi Muschenb. *dis. cit. exp. 23. pag. 55. 56. vi aequali Monnier Encyc. l. c. contendit; consentiunt tamen postquam fuerit refrigeratum pristina vi magneti adhaesurum.*

(*p*) Quod contigisse videtur in *exp. Monierii loc. cit.*

(*q*) Cf. Beccaria *dell' elettricismo artif. § 68.*

maiores distantiam in polum diversi nominis agit, quam in ferrum magnetismo destitutum (r).

19. Foliola metallica ad corpus actu electricum celerius feruntur, si deferente corpore, quam si coercente sustineantur (f). Ita ferrum validius magneti adhaeret, si ferrum, quam si aliud quodvis corpus suppositum fuerit (t).

20. Ex eodem principio fit, ut ferrum nimis breve minorem ex affricu magnetismum suscipiat, admoto in extremitate ferro alio majorem (u); majorem iterum si ex utroque extremo ferrum fuerit admotum (x); majorem denique, quo admota in extremitatibus ferra iisdem fuerint propinquiora (y), eo nempe major ex affricu vis excitatur, quo facilius per unum extremum magneticum fluidum ingredi potest, per alterum egredi, facilius autem ingressus, egressusque paratur admotis ferra, eoque facilius, quo proximius admoventur.

21. Ex eadem electricitatis analogia corpora deferentia electricum fluidum, si levia sint, ac mobilia, ita disponuntur, ut viam faciant inter corpora idem recipientia, & emittentia (z). Ita scobs ferrea circa magnetem posita in arcus disponitur, quorum extrema utrumque polum attingunt (a).

22. Supra dictum est magnetem, nonnisi certa directione a magnetico fluido permeari (11. 17.); inde fit, ut per polorum superficies fluere, ac simul colligi fluidum illud non possit; eodem modo, quo electricum fluidum per vi-

tro-

(r) Muschenb. cor. 3. pag. 45. diff. cit.

(f) Noller essai sur l'electric.

(t) Reaumur memoire de la Acad. 1723.

(u) Encyc. l. c.

(x) Si plures virgae aequales, & similes in longum dispositae magnete fricentur, quae mediae sunt, maximam vim aquirunt. Encyc. l. c.

(y) Muschenb. exp. 53. pag. 112. diff. cit.

(z) P. Beccaria in epis. ad Cl. Beccarium.

(a) Rohault. pag. 268. n. 24. Muschenb. diff. cit. exp. 66. pag. 121., & exp. 117. pag. 242.

trorum superficies fluere nequit. In electricis vitrum corpore aliquo deferente tegitur, quo vapor electricus colligi possit; ita, & in magneticis superficies polorum bracteis ferreis reguntur (quod unum corpus respectu fluidi magnetici (4) deferens est), ut similiter fluidum magneticum per easdem fluere, ac simul colligi possit; in utrisque ea opera ex corporibus deferentibus armaturae vocantur (b).

23. Verumtamen non sufficit, ut vapor magneticus per armaturam ferream fluere queat, sed praeterea necesse est, ejus motum omnem ad certam plagam determinari, ut ibidem colligi, & condensari fluidum illud possit; propterea ferreae laminae armaturam constituentes pedem ferreum continuum habent, qui sub magnetem extenditur, & fertur versus pedem alterum ab oppositi poli lamina similiter productum; ita enim magneticum fluidum per unam laminam effluens ad pedem accurrit, unde faciliorem, breviorisque viam invenit, ut ad pedem alterum regrediatur; non secus ac, si alicubi machinae electricae partes catenae partibus fuerint viciniores, ad eam viam percurrendam omnis vapor electricus determinatur, quod per eam viam minimam resistentiam inveniat (c).

24. Cum armatura colligat fluidum per polorum superficies fluens (22), intelligitur cur eo pacto magnes majori ferri ponderi sustentando aptus evadat (d); cur item armatus magnes majorem magnetismum ferro communicare valeat, quam non armatus (e); cur demum magnetis armati virtus, caeteris paribus, sit in ratione superficierum polarium (f).

(b) Haec comparatio ab Illustri Franklino proposita fuit epist. 4. ad Colinsonium §. 1.

(c) P. Beccaria §. 58.

(d) Musch. disc. cit. exp. 74. p. 132. 133.

(e) Id. l. c. exp. 76. p. 133.

(f) Id. exp. 79. p. 135.

25. Quod autem ex armaturae pedum vicinia magneticum fluidum determinetur, ut ab altero in alium fluat (24), ulterius confirmatur observando ex armatura sphaeram activitatis magnetis imminui (*g*), tum armaturam ipsam opposita pedibus parte minimam vim possidere, ac demum armaturae crura, dum versus pedem protenduntur, & proinde majorem magnetici fluidi copiam transferre debent, crassiora etiam fieri debere (*h*).

26. Conjecturam itaque feci vim armaturae crurum autum iri, siquidem fluxus magnetici fluidi ab uno ad alterum pedem interciperetur, de qua re ut certior fierem, polum cognominem aequalis propemodum virtutis ad armaturae pedem admovi, & revera deprehendi eo pacto illius armaturae crura, tum ad majorem distantiam, tum majori virtute ferrum attraxisse: polus diversus admotus contrarium praestitit effectum.

27. Ideo ferrum a magnete attrahi proposueram, quod ferrum respectu fluidi magnetici corpus deferens sit (3), id vero ex eo confirmatur, quod ferrum molle, & armaturae aptius, proindeque magnetico fluido colligendo magis idoneum validius etiam magneti adhaereat; ferrum item phlogistico destitutum, & armaturae ineptum debilissime a magnete attrahatur (*i*).

28. Ex hac ipsa observatione confirmatur, quod superius indicavimus (16) ferrum magneticum effici ex magnetici fluidi fluxu per ipsum certa directione fluentis; quo enim ferrum durius est, atque adeo ex §. praec. difficilius a magnetico fluido permeatur, eo etiam difficilius, tardiusque magneticam vim acquirit (*K*).

29.

(*g*) Id. exp. 77. p. 134. Encyc. I. c.

(*h*) Id. Essai. de phys. §. 556.

(*i*) Musch. Essai. §. 555. 557. Idem ex eo, quod fluido magnetico chalybs difficilius pervadatur majori vi ab eodem contra magnetem impulsam iri concludit, unde contra magnetici fluidi existentiam argumentum desumit §. 787. p. 313. Confer. etiam eumd. in dis. cit. exp. 33. 39. pag. 127.

(*K*) Encyc. I. c.

29. Quando inter corpora positive, & negative electrica corpus deferens aptatur validius utrisque id corpus adhaerebit, quam si alterutro tantum admoveatur, imo majus pondus eo pacto machina, & catena simul elevare poterunt, quam si seorsim in corpora sejuncta actionem suam exercerent; interea tamen fluidum electricum per corpus deferens appositum a catena in machinam redibit, sicque exteriora electricitatis signa extinguuntur. Ita ferrum transversim a polo ad polum magnetis tractum, & majus pondus sustinere valet, quam bina ferri frustra seorsim polis appensa, & interea ab uno ad alterum polum fluidum magneticum revehit, sicque sphaeram activitatis magnetis in reliqua exteriora corpora imminuit, ac ferme extinguit (1).

30. Idipsum ferrum magnetis virtutem conservat, restituit, dum magnetico fluido certa directione fluenti liberiores viam praebet, magisque expeditam, ex cujus fluidi certa directione per ferrum, & magnetem fluxu ipsorum vim nasci, servari, augeri superius innuimus (16). Asserti veritatem confirmant annuli chalybei, qui etiam ea directione siti, quae spontaneae directioni sit opposita magnetismus non amittunt, quin imo ex contrario magnetis affricu aegrius virtutem deperdunt, & licet aliquando amisisse videantur paullo post eandem recuperant (m).

31. Muschenbroeckius observavit, quod si magnes suspensos retinere possit aliquot annulos ferreos sibi invicem admotos, unus autem ex iis ita suspendatur, ut utrumque armaturae pedem simul tangat, tunc hunc unum sustineri, reliquos decidere (n); ego vero generatim sum expertus magnetem armatum, qui exteriori unius pedis parte tres claves facile sustentabat, nec unicam sustinere potuisse, quan-

(1) Musch. dis. cit. exp. 77. ⁶
Encyc. l. c.

(m) De la Hire phil. transf. n. 188.

(n) Exp. 75. p. 173. dis. cit.

quando ipsatum altera utrumque pedem tangebat: ratio autem perspicua est ex §. 29., quod scilicet in postremo calu magneticum fluidum, per appositam clavim ab uno in alium pedem traductum per magnetem ipsum circumiret, atque adeo minorem in ferrum extrinsecus admotum actionem exercere posset; nil igitur singulare est in Muschenbroeckii experimento, nec opus est cum eodem confugere ad ferri figuram, ut phaenomeni ratio eruatur; ex eadem ratione intelligi potest, cur pes unus magnetis contra albi ferri laminam applicitus multo validius, & copiosius ferri limaturam margini circumpositam alliciat, quam si ambo armaturae pedes ipsi laminae aptentur; in primo nimirum casu magneticum fluidum per ferri laminam effusum ad ipsius margines copiosius pervenit, quam in altero, quando per laminae portionem pedibus interjectam ad socium pedem faciliorem invenit regressum.

32. Quo vis magnetis major, eo armatura crassior esse debet (o), ut, & ferrum transversim adhaerens (29); crura item armaturae dum majorem magnetici fluidi quantitatem successive versus pedes recipiunt, successive etiam crassescere debent (25): ergo ferrum nonnisi certam magnetici fluidi quantitatem transmittere commode potest, cum corpora electricitatem deferentia maximam facillime ferant.

33. Electricitas catenae fortior erit si machina corporibus perfecte deferentibus, quam si imperfecte deferentibus suffulta sit, & vicissim machinae electricitas fortior erit, si catena perfecte, quam si imperfecte deferentibus corporibus suffulciatur: similiter vim unius poli majorem fuisse deprehendi (p), quando oppositus polus praelongum ferrum contiguum habebat, quod praestantissimum deferens corpus esse demonstravimus (27).

(o) Id. Essai §. 554.

(p) Id ipsum a Savery fuerat observatum vid. Sag. delle transf. filosof. del Cavaliere Dercam t. 5. p. 100. §. 26.

34. Si folium auri versus catenam apicem suum dirigat, atque inter hoc, & catenam transversim metallum mucronatum admoveatur, bracteae apex eam directionem amittet; sic dum acus ex superposito magnete supra tabulam erigitur, si alia inter illam, & magnetem adnota fuerit, prima statim decidet. En igitur phaenomeni explicationem, quod omnes fluidorum currentium leges respuere Muschenbroeckius affirmat, ex quo concludit magnetem non operari effluviis, aut fluido quocumque alio (g).

35. Bina fila ex catena, vel machina actu electricis pendencia a se mutuo recedunt (r). Ita binae acus apicibus suis ex utrovis magnetis polo pendentes invicem divergunt. 2. Angulum eo majorem fila electrica constituunt, quo major est electricitas (f). Ita acus angulum majorem constituent, si ex admoto polo validiore ejusdem nominis, poli sustinentis magnetismus augeatur, ad parallelismum accedunt, si admoto ferro, multoque magis ad oppositum polum traducto (19), ejusdem magnetismus minuatur. 3. Fila electrica magis divergunt si ipsis admoveatur corpus deferens (t). Ita acus ex admoto ipsis ferro majorem divergentiam acquirunt. 4. Si filum ad contactum corporis deferentis perveniat, ipsi adhaeret (u). Ita si acus ferrum attingat, cum eodem jungitur. 5. Quod si fila inter bina corpora aequaliter electrica posita sint parallela evadunt (x). Ita si acus inter polos cognomines pendeant ipsarum divergentia minuitur, aut penitus aufertur. Cavendum autem est in hisce experimentis, ne acum, quae adhibentur, extrema magnetismo, ac praesertim contrario imbuta sint, quod eorum experimentorum eventum perturbare posset.

- (g) Dissert. exp. 54. p. 113.
- (r) Beccaria §. 94. n. 1.
- (f) Ibid. n. 2.
- (t) Ibid. n. 3.
- (u) Ibid. n. 4.
- (x) Ibid. n. 5.

36. Si maximum ferri pondus, quod a magnetis polo sustentari potest eidem appensum sit, admoto polo diversi nominis alterius magnetis appensum ferrum decideret, si vero ejusdem nominis polus alterius magnetis admoveatur ad eam distantiam, ad quam eundem repellit, ferrum non modo non decideret, verum etiam aliquot alia ponduscula ipsi appensa sustentabit, quod scilicet in primo casu liberiori facta via fluido magnetico per datum polum fluenti ejusdem affluxus per appensum ferrum minuat, in altero impedito fluidi magnetici transitu, a fluido contraria directione fluente, id majori copia per appensum ferrum moveri cogatur, quod apprime congruit cum iis, quae §. 26. proposuimus, ex quibus ea lex erui potest polos se attrahentes vim suam in ferrum extrinsecus admotum imminuere contra dum se repellunt majori vi ferrum extrinsecus positum allicere.

37. Docent nonnulli armaturae pedes validius attrahere interna parte, quam externa. Id verum esse tantummodo videtur, quando utriusque pedis externa, interna eve partes simul agunt, per ferrum transversum iisdem applicitum (29), falsum quando agunt seorsim; nam in primo casu fluidum, quod ad vicinum polum copiosius accurrit, per ferrum attractum transit (§. cit.), secus ac in altero casu contingat (§. praeced.).

38. Docent etiam, si pedes armaturae introrsum sub magnetem vergant validius attrahere, quam si vergant extrorsum, quod iterum verum duntaxat esse videtur, quando utroque pede simul utimur; nam si unico pede utamur, is eo debilius adhaerens ferrum sustentabit, quo proximior erit pedi alteri, ad quem divertere potest magneticum fluidum.

39. Quando unico pede utimur majus ferri, quam alterius corporis pondus sustentabit, quando utroque pedem majus alterius corporis quam ferri. In primo enim casu copiosius

ad

ad ferrum, quam ad aliud corpus, fluidum affluet, in altero dum per ferrum diffunditur tanta copia in oppositum polum non redibit.

40. Acuminata porro corpora majori copia electricum fluidum recipiunt, & emittunt (γ); idipsum in magnetico obtinere videtur: extremitates enim conicae cylindrorum, qui magnetismo imbuti fuerunt pondus ferreum multo gravius sustinent, quam plana eorundem basis (ζ), & limatura ferri copiosius magnetis, vel magnetici ferri angulis adhaeret, quam planis eorundem superficiebus (a), & anguli armaturae (22.) externi, si acuti fuerint vim magneticam imminuunt, ac disperdunt (b), non secus, ac metallicus apex catenae, aut machinae adnexus electricam vim imminuit (c), & acutum demum ferrum ex affricu, contra ferrum, aut rigidum aliud corpus, majorem, quam planum ferrum virtutem acquirit (d).

41. Cum autem ad eandem distantiam magnetis actio extendatur, sive corpora, quaevis fuerint interposita, sive nullum corpus intercedat (e), inde conjectabam aërem non minus, quam corpora reliqua, fluidi magnetici expansioni resistere, ac propterea coërentis corporis vicem praestare, qualem aëris resistantiam respectu electrici fluidi experimenta demonstrarunt (f). Quamquam enim interpositam flammam electrici vaporis actionem ad longinquius intervallum extendere novissem (g) imminuta, ut puto, aëris resistantia, magnetici non item (h), quamquam

h

ma-

(γ) Franklin. epist. 1. §. 17.

(ζ) Muschenb. diss. pag. 97.

(a) Id. l. c. exp. 64. pag. 118., & exp. 116. pag. 241.

(b) Ideo in rotunditatem secundos esse monet idem Muschenb. Essai de Physiq. §. 556.

(c) Franklin. epist. 6. §. 76. P. Beccaria §. 191. 232.

(d) Muschenb. diss. cit. exp. 245. pag. 268.

(e) Saggi di naturali esperienze intorno alla calamita, esp. 1. & 2. Muschenb. diss. cit. pag. 59. & seq.

(f) Franklin. epist. 2. §. 22.

(g) P. Beccaria §. 457.

(h) Muschenb. diss. cit. exp. 28. pag. 74.

magnetem in vacuo boyleano idem ferri pondus gestare, quod in aperto aëre compertum habuissem, quamquam magnetem in aëre constitutum magnetem alium ad datam distantiam aequali vi attrahere meminissem, sive is in vacuo, sive in aëre collocaretur (*i*); hisce tamen experimentis non acquiescebam, ex eo vel maxime, quod ferrei apices majori copia magneticum fluidum, & emittant, & recipiant (40), ac similis apicum proprietas in electricis ex aëris resistentia in primis nascatur (*K*), etsi in vacuo adhuc obtimeat (*l*). Sequens igitur in eam rem experimentum institui. Sub campanam pneumaticam ferramentorum congeriem collocavi, & in suprema recipientis parte notam apposui, ut ad idem punctum semper magnetis polum aptarem, dein ex opposita recipientis parte ad eandem notae altitudinem acum nauticam collocavi, & tentando distantiam maximam inveni, ad quam acus illa nautica a magnete ad notam appposito commoveri posset; postremo aërem exantlavi expectans futurum, ut magnetis actio ad acum usque pervenire amplius non posset; siquidem aër magnetico fluido resistentiam faceret; enim vero ablato aëre resistentia minui similiter debuisset fluido ad supposita ferramenta tendenti, hacque ratione aucto ejusdem fluidi ad ea ferramenta affluxu id ab acu averti debuisset; perinde ac catena electrica, cujus extremum per verticem recipientis pneumatici traducitur corpora extrinsecus posita ad datam distantiam agitat, quamdiu aër prohibet ne electricum fluidum in subjectam lancem fluere, ac disperdi possit, ablato autem aëre, & liberiori parata via electrico fluido ad lancem tendenti catenae actio in exteriora corpora extinguitur (*m*). Sed nihil hujusmodi observare

COR-

(*i*) Id. *dis. cit.* exp. 25.

(*K*) P. Beccaria §. 217. 218. & seq.

(*l*) Id. §. 235.

(*m*) Consule Beccariam §. 221.

contigit, cum ad eadem distantiam magnes in acumageret, sive vacuum recipiens esset, sive aëre plenum, ex quo proclive erat concludere per spatia aëre vacua aequè difficulter magneticum fluidum moveri, ac per corpora alia quaevis excepto ferro. Quantum porro firma est hujus experimenti veritas, tantumdem erroribus obnoxiae essent hypotheses, quae ad id explicandum excogitari possent: satius igitur erit consuetaria quaedam adnotare; scilicet 1. Vapor electricus, dum ex corpore in corpus, transit stridorem edit, magneticus non item 2. Corpora actu electrica auram quamdam excitant, magnetica nil simile praestant. 3. Interposita ut diximus flamma electricam atmosphæram ad majus intervallum extendit, magneticam non mutat, quae omnia ex memorata aëris resistentia intelligi posse videntur, quae, cum respectu electrici fluidi ingens sit, magneticum non afficiat.

42. Diximus polos ejusdem nominis utcumque inaequaliter magneticos, tamen se repellere (10); id in majori aliqua tantum distantia verum est, namque in minoribus distantibus, non modo vis repulsiva non augetur, sed minuitur, & tandem in attractivam mutatur, eoque citius, quo virium differentia major est: tamdiu nempe se repellunt, quamdiu fluidum magneticum per utrosque contraria directione movetur, contraria autem directione movetur, quamdiu polus debilior in tanta distantia ab actuosiori constituitur, ut fluidum ab actuosiori emanans ac in debilius irruens, per debiliorem polum eadem directione non feratur, tunc enim juxta sancitam motuum legem (10), vis repulsiva in attractivam mutabitur; & revera, quando ad polum dati nominis ejusdem nominis polus validior admoveatur in distantia adeo exigua, ut eundem attrahat tardius, vel citius polus debilior in contrarium mutatur (16), quod demonstrare videtur magneticum fluidum a validiore magnete erumpens alterius fluidi a debiliore polo contraria

directione effluentis resistantiam vicisse, & propria directione per ipsum permeasse (§. cit.): imo vero caeteris paribus eo citius debiliori poli virtus mutatur, quo inter ipsius vim, & vim validioris major differentia intercedit, & quo magis ad se mutuo admoventur (§. cit.); attractio autem polorum cognominum in data distantia eo item major existit, quo virium differentia major est, & imminuendo sensim distantias vis repulsiva eo citius in attractivam mutatur, quo virium differentia major, eo tardius, quo minor existit, quemadmodum sequentibus experimentis comprobavi.

1. Poli magnetici debilioris virtutem adhuc imminuebant per ferrum transversum eidem admotum (30), tum vero polus validior ejusdem nominis ad exteriorem illius partem admotus longe fortius adhaerebat, quam si nullum hujusmodi transversum ferrum adfuisset, unde patet in contactu polorum ejusdem nominis attractionem augeri, si debilioris poli virtute imminuta, virium differentia augeatur.

2. Quod si ferro transverso non debilioris poli, sed robustioris vim imminuerem, tunc attractiones in contactu similiter minui observabam, imminuta virium differentia.

3. Ad apicem acus magnetismo imbutae, & per filum libere suspensae polum magneticum ejusdem nominis paulatim admovebam, & ad hujus latus ferream clavim aptabam, quando autem ad talem acus viciniam polum adduxeram, ut jam vim repulsivam in attractivam mutandam fuisse conjectarem, si clavis abfuisset, ipsam aufereram, eodemque, ut plurimum momento acus ad magnetem apice suo ferebatur, id ipsum luculentius adhuc transverso ferro, aut polo diversi nominis admoto, tum sublato, sicque vi imminuta, ac dein restituta experiri licebat, unde constat polos cognomines ad distantiam eo majorem se attrahere, quo inter eorum vires differentia major intercedit.

Cum

Cum igitur eae conditiones, quae efficiunt, ut dati poli vis directiva tardius, citiusve mutetur, eadem efficiant, ut is a cognomine polo proximius, remotiusve, tum validius, debiliusve attrahatur, cumque mutata poli directio a contrario fluxu magnetici fluidi producat (16), inde confirmari videtur repulsivam quoque vim in attractivam ob eandem causam mutari, ob servatam scilicet a fluido validioris poli per debiliorem propriam directionem (n).

43. Muschenbroeckius, quando in minori aliqua distantia polorum vis repulsiva minuitur, aut exstinguitur, non revera minui, aut exstingui censet, sed cum attractiva duntaxat conjugi, quae magis crescat, quam repulsiva imminutis distantis, & proinde eandem aequet, aut superet, unde, vel nulla vis repulsiva remaneat, vel etiam attractiva nascatur (o). Haec vero Muschenbroeckii sententia confirmatur experimento 3. §. praeced., nam clavis robustiori polo admodum debiliorem acus polum certe non repellere, sed potius attrahere debuisset, & tamen repulsivam vim servabat, quod praestitisse videtur attractivam vim validioris poli in debiliorem, imminuendo, quae si integra fuisset repulsivam facile superasset, atque extinxisset.

Quae quidem Muschenbroeckii theoria cum principiis nostris egregie consentit; nam fluidum magneticum ad debiliorem polum spectans, & fluido robustioris poli resistens vim repulsivam facit; excessus virium fluidi ad robustiorem polum spectantis, quo debilioris fluidi resistantiam superat, & per debiliorem polum propriam directionem servat, attractionem producit.

44.

(n) Mitchelius ideo vires repulsivas, imminutis distantis, imminui censet, quod poli repellentis debilioris virtus imminuatur (Encyc. l. c.) sed saepe observatur in aliqua distantia vim repulsivam imminui, aut etiam in attractivam mutari, etiam si debilior polus debilitari, aut mutari adhuc non potuerit. Enim vero fluxus fluidi certa directione sufficit ad attractionem faciendam, ut vero magnetismum mutet per tempus aliquod debet perdurare (16).

(o) De magn. exp. 17., ubi si attractivae vires a repulsivis subtrahantur has certas reciprocas distantiarum proportionem servare adnotavit.

44. Chalybis porro temperati magnetismo imbuti virtus caeteris paribus difficilior, quam simplicis ferri virtus a robustiori polo mutatur (p): An non ideo, quod difficilior validioris poli fluidum per chalybem, quam per ferrum sibi viam faciat (28)? An non itaque debilius chalybei poli ejusdem nominis se attrahere debent, & ad minores distantias, quam poli ferrei, siquidem ea, quam proposui, theoria locum habeat? Ex eadem quoque theoria intelligitur, cur poli cognomines, quamdiu se repellunt suas vires in ferrum extrinsecus admotum mutuo augeant (36), quando vero jam repulsio in attractionem mutata est potius imminuant; quamdiu enim se repellunt fluida contraria directione lata se mutuo coërcent, quando vero se jam attrahunt a robustiori polo in debilius, vel contra magneticum fluidum movetur, atque adeo in primo casu per feramenta extrinsecus admotum fluidum illud adigitur, in altero per admotum polum dissipatur.

45. Magneticae acus directio ea est, ut uno extremo fluidum magneticum recipere, altero emittere quam commode possit, quam proprietatem electricorum corporum phaenomenis analogam esse superius monuimus (21), inde vero fit, ut ferrum magnetismo destitutum, si collocetur in eo situ, ad quem acus sponte se dirigit ex magnetici fluidi juxta eam directionem fluxu magneticum evadat (q), imo eandem magneticam vim acquirit, si juxta lineam constituitur, quae meridianam magneticam ad angulum quemvis interfecit, sed eo tardius, debiliusque, quo angulus major fuerit, donec ad angulum 90° nullam adipiscatur (r): ferrum quoque eo citius vim eam acquirit, quo longitudo majorem ad crassitiem proportionem habuerit, & quo mollius fuerit, multoque majorem suscipit, si candens eo in situ sponte, aut aqua frigida affusa, refrigerat: ex-

tre-

(p) Encyc. 1. c.

(q) Muschenb. diff. exp. 132. pag. 216.

(r) Id. h. c. ab exp. 133. ad 136.

tremitas autem, qua ad polum boreum inclinatur, borealem polum, qua inclinatur ad australem, australem acquirit, & ex contrario situ vim pristinam amittit, oppositamque adipiscitur (f), quae omnia cum iis conveniunt, quae de magnetismo per magnetem inducto observata sunt (16. 20.) unde recte Muschenbroeckius conclusisse videtur (t), vim magnetis terrestris esse admodum universalem, eam se extendere per totum terrarum orbem, agere in omne ferrum, id dirigere haud aliter, quam ferrum allici, regique a magnete observetur.

46. Acus vero ferrea magnetismo destituta, debilius quidem, dirigitur tamen juxta meridianam magneticam, sed indiscriminatim, quae extremitas polo telluris septentrionali proximior est ad illum convertitur, quae vero australi ad australem dirigitur, & inversa acus aequae facili contraria directione se collocat, quamdiu ex diuturna mora in aliquo situ constantem magnetismum non acquisivit (u): ea enim directione se collocat, qua viam faciliorem praebeat magnetico fluido certa directione fluenti (21), quapropter cum id fluidum, quamdiu magnetismo destituta est oppositis directionibus juxta ejus longitudinem aequali facilitate feratur (15. 17.), idcirco oppositas directiones indiscriminatim acus affectabit.

47. Neque solum terrestris magnetis actio manifesta fit, quando ex diuturno magnetici fluidi per ferrum fluxu id magneticum demum evasit (44), verum etiam in ferro magnetismo destituito ejusdem effectus observantur; nam si virga quaevis ferrea in situ quovis collocetur, ut meridianam magneticam intersecet, medietas virgae, quae ad polum magneticum borealem telluris inclinatur vim poli septentrionalis ostendit, quae ad australem, australis, inversaeque virga eae medietates contrarium polum protinus

exhi-

{f} Id. loc. ult. cit.

{t} Exp. 146. pag. 268.

{u} Savery. vid. sag. delle transf. del Cav. Dorcham t. 5. §. 32. pag. 102.

exhibent, ita ut polaritas, quae respectu telluris constans est, respectu virgae ferreae ex mutato situ mutetur, donec ea virga constantem magnetismum ex diuturna mora in certo situ non fuerit adepta (*x*), ex quibus, & vis magnetis terrestris conspicua efficitur, & confirmatur magnetismi contrarietatem in contraria magnetici fluidi directione reponendam esse, & demum evincitur ferrum magnetismo destitutum a magnetico fluido aequè facile quacumque directione permeari (15. 17.), cum eadem virga magnetico fluido opposita directione fluenti, tam facilem transitum praebear, ut ipsius extremitates ex inversione in oppositos polos illico mutantur.

48. Quoniam ferrum ex magnetici fluidi juxta certam directionem fluxu magneticum fit, ex contraria ejusdem fluidi directione contrarium acquirit magnetismum (16. 45.), quoniam facilius ex fluido per meridianum excurrente, vel a magnete prodeunte vim magneticam acquirit, si ex igne molle, sponte, vel superaffusa aqua refrigerescat (*y*), quoniam chalybs durior difficilius magnetismo imbui potest (*z*), sed majorem recipit, & diutius servat (*a*), quoniam ignitio (17), percussio, attritus (*b*) magnetismum destruunt, inde confici videtur magnetismum in certa partium dispositione situm esse, ob quam ferrum magnetico fluido ex una parte recipiendo, ex altera emittendo aptum sit, eamque dispositionem ab ipso fluido induci, tum auferri posse, idque eo facilius, quo ferrum fuerit mollius.

49. Cartesiani, qui motus magneticos ex solis mechanicis legibus explicare contendebant, partibus magnetici fluidi, tum magnetis, ac ferri poris figuram tribuerunt, quam

- (*x*) Id. l. c. §. 18. pag. 97.
- (*y*) Conf. loca cit. §. 16., & 45.
- (*z*) Encyc. l. c.
- (*a*) Muschenb. diss. pag. 232.
- (*b*) Id. pag. 73. 74.

quam maxime opportunam esse opinabantur, aëris quoque resistentiam, ac reactionem huc accerferunt; cautiore alii, ut Muschenbroeckius (c) Wifthonus (d), cum Cartesianos scopum non attigisse animadverterent, vel ipsius magnetici fluidi existentiam indubium revocarunt. Ego ad mechanicas rationes omnia exigere minime potui, ac ne studui omnino quidem, cum nec ipsa electricitatis theoria usque eo perducere potuerit; malui igitur analogia ductus theoriae electricae innumera, sejunctaue phaenomena ad certas classes revocare; nec vero diffiteor hanc me comparationem multo, quam fecerim, versare potuisse accuratius. At summa tantum capita speciminis loco attingenda esse putavi, ne in re facili nimia prolixitas lectori molesta evaderet.

50. De Analogia inter fluidum electricum, ac magneticum haftenus: nunc de identitate horum fluidorum aliqua essent addenda. Et experimenta quidem nupera, per quae acus magnetica sit artificiali electricismo, aut ipsius poli mutantur; tum observationes, quibus constitit acus nauticae directionem vi fulminis mutatam fuisse, identitatem confirmare utique possent, si definitum esset, utrum electricum fluidum magnetismum inducat magnetici fluidi vices gerens, an agat duntaxat ad instar communis ignis (e), quod olim Muschenbroeckius proposuerat (f), quae minus dubia forent, si certis experimentis constaret, num extremitates acus quae meridiem, & septentrionem respiciunt

po-

(c) Dis. p. 57. & seq., & a p. 63. ad 76., & p. 218., & Essai §. 187.

(d) Apud eundem p. 65. dis. cit. Cl. Monnier in act. Acad. R. S. P. an. 1733. contra fluidi magnetici receptam theoriam argumenta proposuit.

(e) Revera ad magnetismum inducendum tanta requiritur electrici fluidi copia, talis acus inter vitreas laminas dispositio, tanta ejusdem tenuitas, ut electricum fluidum acus colorem mutare, quin imo ipsam liquefacere possit (Cl. D. Alibard. in addit. ad Franklinum t. 2. pag. 137. 147. 148.) atque adeo effectus praestare, qui ab ignis violentia producantur.

(f) Dis. pag. 225. exp. 106.

polum constanter acquirant cognominem plagae, ad quam diriguntur, quaecumque fuerit directio fluidi electrici acum permeantis, num contra in quocumque acus situ extremitas, per quam electricus vapor ingreditur, septentrionalis, per quam egreditur australis perpetuo evadat (*g*), num demum acus juxta aequatorem magneticum collocata ex electricitate nullum magnetismum acquirat, quemadmodum ignitum ferrum eo in situ refrigeratum nullum adipisci experimenta demonstrarunt (*45*).

51. Caeterum contraria, quae se se offerunt argumenta minime reticenda videntur. Scilicet primo magneticum fluidum dum a magnete ad ferrum, vel a ferro ad magnetem fluit, per interpositam aëris laminam, etiam in tenebris non lucere, quod electricum fluidum facere solet. 1. Ab aëre resistantiam nullam pati, nec ab interposita candela ejus actionem mutari, nec stridorem edere; auramve excitare (*41*), quae omnia phaenomena in electrico fluido observamus. 3. Magnetem ipsum frictione electricum fieri, tumque novam proprietatem acquirere a priori distinctam, cito cessantem. 4. Resinosa, serica corpora, quae fluidum electricum coërcent, magneticum non magis, quam caetera coërcere. 5. Metalla omnia, ferro excepto, quae fluidum electricum deferunt, magneticum non magis, quam caetera deferre (*h*). 6. Corpora deferentia electricum fluidum maxima copia deferre facile posse, deferentia electricum nonnisi certa quantitate (*37*) 7. Ex affrictu corporum electricum fluidum deferentium vim nullam electricam nasci, contra ex ferri contra ferrum certa lege affrictu maximum magnetismum produci. 8. Demum eas tempestatum mutationes, quae electrica phaenomena insigniter

{*g*} Non consentiunt Franklini, & D. Alibardi experimenta t. 2. p. 144. 145.

{*h*} Musch. Essai. S. 187. n. 3.

gniter mutant , non eodem modo magnetica afficere ;
 contra , quae magnetica afficiunt , non similiter afficere
 eleétrica (i) , quae omnia fluidorum horumce identita-
 tem , si non refutare , at certe dubiam reddere posse
 videntur .

(i) Encyc. artic. cit.



De colore Sanguinis experimenta nonnulla.

Coccineum rutilumque sanguinis colorem, exhausto aëre, in atrum, & nigricantem converti Cl. Viri scripserunt (a), cum contrarium alii traderent supremam nempe sanguinis superficiem in vacuo non minus, quam in aperto aëre rutilum colorem servare (b). Quod quidem experimentum cum multis physiologicis gravissimis quaestionibus illustrandis opportunum esse animadverterem, ea cautione, eaque diligentia renovari cupiebam, ut nulum de ipsius eventu dubium superesset. Itaque Virum experientissimum J. B. Beccaria rogavi, ut idipsum susceperet, quod humaniter praestitit, quemadmodum sum expositurus.

1. Sanguinem ex homine febricitante eductum, & quassatione solutum in bina pocula vitrea aequalia, & similia infudit, horum alterum sub recipiens pneumaticum collocavit, alterum in aperto aëre reliquit. Subducto aëre sanguinem sub recipiente positum insigniter elevari, in spumam facessere, intumescere in bullas observavimus sensim incrementas, quae tandem disruptae aërem emittebant elasticum, ex quo altitudo mercurii in appposito indice augebatur: interea color sanguinis eleganter floridus, & rubicundus perseverabat.

Cum vero repetitis diu exantlationibus omni aëre exhaustus sanguis subsedisset, floridum colorem cum atro, & nigricante mutavit, quemadmodum ex comparatione cum eo, qui extra recipiens erat, facile innotuit; etenim non in suprema tantum superficie, verum etiam in tota mole multo obscurior, ac nigrior deprehendebatur; postremo cum poculum

{a} Dorsten apud Haller n. 9. ad §. 203.

{b} Gorter comp. trac. 31. §. 9. n. 9., & Rega consent. Schvvencke haematol. p. 116.

solum eductum ex recipiente fuisset, paullo post contentus sanguis rutilum in suprema superficie colorem recuperavit, & rutili strati crassities, aëre profundius pervadente, sensim, sensimque crescebat, adeo ut post aliquod tempus totum sanguinem aequè rutilum, ac prius, se invenisse Cl. Beccaria narraret.

3. (*) Cum igitur aër sanguini admixtus ruborem faciat, inde cum Lovvero intelligimus, cur sanguis venae pulmonalis, perinde ac arteriosus floridus sit, cur contra arteriae pulmonalis sanguis perinde ac venosus atro colore inficiatur.

(β) Cur postquam sanguis arteriosus, & venosus per aliquot minuta aëri expositus fuit omne coloris discrimen tollatur (*).

(γ) Cur item, obturata trachea, & impedito aëris accessu ad pulmonem id discrimen sanguinis arteriosi, & venosi tollatur.

(δ) Cur inflato in cadavere pulmone, eadem diversitas restitatur (c).

(ε) Cur rejectus ex pulmone sanguis spumofus floridusque esse soleat.

(ζ) Cur in foetu, qui pulmone non utitur, sanguis obscuri, & rubiginosi coloris, & aquosus perpetuo reperiatur (d).

(η) Cur in erysipellate, aliisque morbis, quos ingruens putredo comitatur, sanguis intente floridus, ac rutilus observetur (e), aëre nempe putredinis vi ex eodem prodeunte, cur item in confirmata putredine, omni prorsus aëre diffusato, sanguinis color niger, & luridus evadat.

(θ) Cur

(*) Hammerschmidt. in disput. cui titul. notabile discrimen inter sanguinem arteriosum, & venosum §. 22.

(c) Vid. Lovverum de mot. cord. p. 159. & seq., & consentientes Bohon, Duverney apud Haller n. 11. ad §. 200.

(d) Observante Haller l. c.

(e) Gorter. Chirurg. §. 14. 29. & alibi.

(*g*) Cur demum in gangraena partes emphysematicae evadunt aëre vi putredinis prodeunte, tumque sanguis ex scarificationibus effluens nigro colore inficiatur.

Sanguis quassatione solutus, & aequabili rubore praeditus, dum putrescit, ruborem amittit, nigrumque colorem acquirit, & primo quidem ea mutatio in superiori sanguinis strato contingit, quae pedetentim ad inferiora strata progreditur, quemadmodum in suis circa putredinem experimentis D. Gaber observavit, cujus phaenomeni ratio esse videtur, quod superiora strata putrescentia aërem facilius emittant, quam illa, quae iisdem subjiciuntur.

Definiendum autem superesset, num sanguis ruborem in pulmone receptum in venis amittat ex eo, quod aërem per corporis superficiem expellat (*f*), an quod aëri elasticitatem demat, & rubori servando imparem efficiat, inde enim forte intelligeretur, cur diversitas sanguinis arteriosi, & venosi aliquando maxima, alias nulla fuerit observata (*g*).

4. Sanguis porro quamdiu solutus est, aequaliter coloratus apparet, dum autem concrevit in suprema superficie ruborem servare, in infima nigrum colorem induere ab antiquissimis temporibus est observatum (*h*), idque post Galenum (*i*), veteres plerique tribuerunt humori melancholico, qui reliquo sanguine gravior, & nigrior proprio pondere ad infimam vasis partem delaberetur, interea dum cruor specificè levior supernataret, nec multum ab hac theoria recesserunt recentiorum non pauci, qui ruborem parti magis sulphureae, leviori, tenuiorique tribuerunt, inferioris partis nigredinem densiori, magisque terrestri sanguinis

(*f*) Quae Mery sententia est apud Haller. n. f. ad §. 201., quam idem Hallerus rejicit n. a ad §. 432.

(*g*) Haller prim. lin. phys. §. 117. 206. caeterum eam diversitatem super confirmavit Hammerfeldt. disp. cit. §. 22.

(*h*) Arist. hist. anim. lib. 3. cap. 19. Hippoc. de gland. 1. 6.

(*i*) Com. in 3. epid. 1. 5. de atra bile toto libro, de elem. 2. 12.

guinis parti adscribendam esse existimarunt (*K*), & quamquam, inversa sanguinea placenta, ut inferior superficies suprema evaderet, quae vero suprema fuerat in inferiorem abiret, illam rubrum, hanc nigrum colorem induere cernerent (*l*), id nihilominus tribuere maluerunt gravioribus, & nigrioribus sanguinis partibus, quae superiora deferant, & proprio pondere ad inferiora truantur (*m*), quamquam non levis erat obiectio in massa solida, & concreta, qualis sanguinea placenta est, haud facile partes juxta variam specificam gravitatem distribui posse: ut igitur phaenomeni causam assequer, sequentia experimenta institui.

5. Sanguinem ex vena hominis pleuristici eductum statim affudi aequali quantitate in bina pocula vitrea aequalia, & similia. Alterius superficiem superaffuso oleo ad pollicis altitudinem cooperui, alterum in libero aëre reliqui, in utroque sanguis coagulabatur, & is, qui aëri expositus erat rutilum admodum ruborem in superficie aëri contigua contrahebat, reliqua superficiei pars, quae poculi parietes tangebatur in atrum colorem mutabatur: sanguis vero alterius poculi, educto per syphonem oleo, aequabiliter niger est deprehensus, interea aëri expositus ruborem in superiori superficie adeptus est, in aliquibus tantum locis, ubi oleo adhuc inunctus erat, nigrum colorem servavit. Id deinceps experimentum in recenti vitulino sanguine coram Cl. Beccaria, pari successu, renovavi.

6. Cum igitur nigricans color non in infima tantum superficie nascatur, verum etiam in quacumque alia poculi parietibus contigua (*n*) patet nigredinem non fieri a partibus gravioribus fundum petentibus: imo cum suprema etiam

(*K*) Schuvencke Haematol. cap. 11. p. 117. Gorter compend. trac. 31. §. 22. n. 3. alii permulti.

(*l*) Notante primum Fracassato in transf. phil. anni 1667. num. 27. art. 4. qui id aëri tribuit.

(*m*) Schuvencke l. c., qui globulos alios prae alijs ponderosiores esse docet.

(*n*) Consent. Boer. Chem. t. 1. p. 261. edit. parisi.

etiam superficies atro colore infecta sit, si tenui olei strato obtegatur manifestum sit ab immediato aëris actu ruborem oriri: errant propterea, qui putant ruborem a levioribus partibus esse repetendum, nisi forte eo sensu leviores esse velint, quod ob contiguum, admixtumque aërem aliquanto solutae, minusque invicem cohaerentes stratum efforment specificè levius (*o*), interea dum partes ipsae a reliquis sanguineae massae partibus nullo modo differant.

7. Hanc etiam partium specificè leviorum hypothesein alio experimento refutare aggressus sum, quod a Lovvero olim jam tentatum inveni (*p*), supremam nempe rubicundam coagulati sanguinis superficiem cultro abradebam, & nigricantem subjectam superficiem detegebam, quae, ubi per breve tempus aëri exposita fuisset, novum rubicundum stratum priori simile suppeditabat, atque eo pacto repetita abrasione totam sanguineam placentam in rubra strata convertere facile potuissim.

8. Praeterea vero, sive amplo, sive angusto vase sanguis recipiatur, in suprema tantum superficie rubicundus apparet; attamen si ex particulis datae solummodo gravitatis rubor oriretur, eo crassius rubicundum stratum esse deberet, quo vas arctius, crassius item, quo major copia sanguinis in eodem vase contineretur, nec fieri posset, ut modica sanguinis copia in amplum vas effusa tota rubesceret, quemadmodum quotidianis experimentis comprobatur.

9. Postremo sanguineam placentam mox ex poculo eductam, atque adeo in lateralibus, & inferiori superficie nigricantem reti superimposui, & non multo post in lateralibus, & inferiori superficie aequè florida evasit, ac in suprema, ut aequabiliter colorata quaquaversum deprehenderetur.

10.

(*o*) Quae Leuvvenhoeckii sententia est in observationibus circa sanguinem mens. Junii 1674.

(*p*) Loc. cit.

10. Ex his autem etiam eorum sententia infirmatur, qui inferiorum partium nigredinem ex superiorum pondere, aut pressione oriri autumant; observavimus enim tenuissimum olei stratum sanguinis superficiem inungens nigritudinem servare, ex quo tamen vix ulla compressio potest expectari; deinde, si nigrities ex incumbentium partium pressione oriretur, prout sanguis profundior esset, magisque compressus, eo majorem nigredinem acquireret, cum tamen iis in locis, quibus aërem non attingit, aequabiliter niger conspiciatur.

11. Quoniam igitur suprema sanguinis superficies rubra est, quando aërem tangit, nigra, quando aër ab eadem arcetur (5), & similiter infima superficies, quae nigra esse solet, admissio aëre, rubescit (9), quoniam sanguis totus rubescere potest, si vel simul, vel successive aëri totus exponatur (7. 8.), quoniam rubor, & nigrities, non per successivos gradus aut crescit, aut minuitur pro altitudine incumbentis sanguinis, sed aequabilem ruborem, & aequabilem nigredinem sanguis acquirit (10), quoniam aëre exhaustus sanguis niger evadit (2), manifestum sit ab aëris attractu sanguineae placentae ruborem oriri.

12. Ex his intelligitur, cur si conquassatione aër sanguini admisceatur, & tardius concrescat, & majorem ruborem acquirat (9).

Cur ea, quae sanguinem fluidum servant, eadem ruborem fervare soleant, & contra.

13. Sanguis porro, dum concrescit, densior evadit (1), & interim ruborem, ut diximus, amittit: errant igitur, qui ex majori densitate sanguinis arteriosi, & condensatione in pulmone nata ipsius ruborem deducunt: quod si in pulmone, non massae sanguineae, sed globulorum densitatem augeri intelligant, quo id tandem experimento comprobant? Profecto inter globulos sanguinis arteriosi, & venosi nullum

k

dif:

(4) Ex Lovvero, Halesio aliisque.

(5) Jurin in compend. transac. philosophic. versione italica Derehami tom 3. pag. 3. esp. 23.

discrimen microscopii ope detegere potuit Hammerschmidtus (f), quod ostendit coloris diversitatem non in componentibus particulis, sed in varia earumdem miscela, ac dispositione positam esse.

14. Cum in foetu sanguis aquosus simul, & obscurus deprehendatur, (3-ζ) patet ex sola feri mixtione ruborem non oriri.

15. Ad attritum quod spectat, ex quo ruborem in pulmone nasci plerique existimant, jam recte opposuit Lovverus in musculis multo magis, quam in pulmone sanguinem atteri (t), attamen ab ipsis nigricantem prodire, & praeterea adnotandum in ejusdem Lovveri experimento, in cadavere strangulati canis, inflato pulmone, sanguinem comprimi potius, quam atteri debuisse, nihilominus ruborem sanguini fuisse restitutum, ac proinde soli attritui ruborem in pulmone natum minime esse adscribendum.

16. Neque vero facile est definire, cur coagulatus sanguis ea in parte, qua aërem non attingit, niger evadat; num ex eo, quod liber aëris per sanguinem transitus prohibeatur, qui dum libere permeat salia, vel quid aliud deponat rubori servando aptum, quod non videtur; nam in clauso etiam spatio suprema sanguinis pars rubicunda diutissime remanet, dummodo tenuem aëris lamellam superpositam habeat; num ex eo, quod atmosphaerae pondere sanguis prematur, quod iterum probabile non est; siquidem atmosphaerae pressionem non minus superficies patitur oleo inuncta, quam ea, quae immediatae aërem contingit; num demum aër sanguini admixtus, & globulis sanguineis interpositus ruborem servet, contra concrefcens cruor contentum in poris aërem expellat, vel ita fixum reddat, ut rubori efficiendo impar evadat, quod aucta concreti sanguinis densitas, & emissus ab aliis concrefcantibus fluidis aër confirmare quodammodo videntur.

JOH.

(f) L. c. §. 6.

(t) Consentit Cl. Sauvages Phys. elem. pag. 110.

JOH. BAPTISTAE GABER⁷⁵

Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.

QUanti Medicinam, & naturalem scientiam interfit putrefactionis historia, jam ipse noverat Philosophiae instaurator Verulamius, qui Medicis idcirco, & Philosophis saepe auctor fuit, ut illius causas, modos, & phaenomena diligentius pervestigarent; eaque passim commoda significavit, quae in affines facultates derivari possent. Atqui tanti Viri monita usque adeo neglecta sunt, ut vix pauci rem tam necessariam tractandam, & illustrandam susceperint; sed plerique ex aliis quaecumque extiterant experimenta, & observationes describere, aut ex praeconceptionis opinionibus consectaria deducere maluerunt, quam rem tentare, & scrutari diligenter: ex eo fortasse etiam praetextum aliquem nacti, quod videbant Chymicorum sectam, & quidquid Chymicam saperet male audire apud prudentiores Medicos, qui ex illius abusu tantam intelligebant rei Medicae perniciem illatam. Sed egregiam huic facultati navavit operam Clariss. Pringle, qui rem diu ante neglectam retractandam adgressus est, novasque aperuit in tam multiplici, & complicata disquisitione proficiendi, progrediendique vias. Magni hujusce Viri exemplo, & monitis excitatus ejus vestigia persequi constitui, quod & rei utilitatem perspectam haberem, & vitae, officiique mei ratio commodam mihi occasionem exhiberet hujusmodi tentandi experimenta. Neque tamen totam simul putrefactionis historiam investigandam suscepi, ne pluribus intentus minorem in singulis diligentiam adhiberem. Solos humanos humores, neque omnes, sed praecipuos tantum per experimenta scrutatus sum, cum haec cogni-

tio prae caeteris omnibus plurimum conducere videatur ad multorum morborum internas causas detegendas, eorum effectus, seu symptomata explicanda, atque ideo ad indicationes eruendas. Quoniam autem experimenta nostra cum Pringlianis minime conveniunt, causas idcirco ex ipsis experimentis eductas aperiam, quibus eventuum diversitatem adscribendam puto.

Lubens omitto inutilia omnia tentamina, qualia antequam aliquid certi in hoc genere assequi possem, fere innumera instituere opus fuit: ea duntaxat recensabo, quae novam aliquam lucem videntur suppeditare.

i. Quinquagenarius vir absque febre inveterato ictero confectus est. Cadaver integro nyctemero, brumali tempore, loco frigido repositum fuerat: hoc transacto temporis intervallo, dissecabatur: conspiciebantur crassa intestina cinereis foecibus infarcta, tenuia flavescente muco hac-illac conspersa, cysticus, & choledocus ductus pervii: cystis ipsa bilis in atrum vergentis ingenti copia distendebatur. Vesicula pertusa bilem vitreo vase excipiebam, modicum foetebat, viscida erat, & tenax: minusculae hujus portioni unam, vel alteram aquae fortis guttulam affudi: effervescebat, erumpebant ad liquoris superficiem aereae bullae cum sibilo, qui admoto ad aures vasculo percipiebatur, atque ipso tactu sentiebam liquorem incalescentem.

2. Superstitem bilem in tres portiones distinctas totidem vitreis vasis apertis infudi, vario situ, & vario caloris gradu distribui; unum in hypocausto ad trigintaquinque circiter gradus Reaumuriani Thermometri calefacto, alterum in alio hypocausto, quod viginti quinque tales calebat gradus, tertium vero cubiculi servabat temperiem, quae inter septimum, & decimum fere continebatur. Viginti quatuor horis elapsis singulas portiones acidis exploravi. Quae bilis triginta quinque graduum calori fuerat exposita, ea dilatior evaserat, vixque indicia levissimae effe-

effervescentiae praebebat: bilis, quae vigintiquinque gradus caloris passa fuerat, diluta quoque apparuit, cum acidis aliquanto magis, sed parum admodum efferbuit: quae demum fuerat in cubiculi temperie relicta suam visciditatem servaverat, & aequè vehementer, ac antea (1) cum acidis conflictabatur. Quod postremum experimentum coram Equite Salutio, Ludovico de la Grange, D. Cigna, & Mich. Ant. Piazza luculentissimis testibus, aliquot exinde hōris simili eventu renovavi.

3. Ex ejusdem cadaveris vena eodem tempore eductus sanguis rubro-flavescentem exhibebat colorem. Ejus sanguinis portio simulac fuit educta, & nitri spiritu dilutiori permixta effervescentiam similiter exhibuit, multo tamen minorem, quam bilis; quo sanguine in digestionem per paucas horas relicto, flavum serum a cruore secedebat, quinimo flavo colore superficies cruoris inficiebatur. Idem sanguis per tantumdem temporis, ac bilis in hypocaustis servatus majorem effervescenti vim retinuit, quam bilis, quae vis ex mora sensim hebescebat.

4. Ex hujusmodi observationibus haec videntur posse deduci conclusoria.

1° Tantam in morbis nasci posse alkalescentiam, ut humores cum acidis effervescent: neque enim probabile est, eam in cadavere mutationem contigisse, quod per horas viginti quatuor servatum fuerat in loco frigido, ubi per plures dies servati humores sani ad talem alkalescentiae gradum vix pervenissent.

2° Levem putredinis, & foetoris gradum, qui extra corpus nullum adhuc alkali praeber, quemadmodum experimentis inferius exponendis constabit, intra animale corpus alkali producere.

3° Alkali intra corpus genitum, & bile contentum volatile admodum esse, & expeditum, quippe quod vigintiquinque graduum calore tam brevi tempore maxima ex parte

parte in auras avolaret, secus a reliquorum elementorum nexu aliquanto magis intricatum esse illud alkali, quod in sanguine continetur, minusve volatile, quum per idem tempus, eodem calore, minor ejusdem portio dissiparetur.

5. Ex postrema hac observatione conjecturam feci, an forte in tentaminibus, quae circa putredinem fuerunt instituta, ex quibus indubias alkali notas nonnulli comperisse affirmant, alii vix levissimas observasse testantur, eventuum discrepantia ex vario caloris gradu, variâ corruptorum corporum aetate, majori, minorive geniti alkali libertate repetenda esset.

6. Non aliter ac bilem corruptam, integram bilem tentavi, sanguinis cruorem, & serum: singulorum tres distinctas portiones memoratis (a) tribus diversis caloris gradibus exposui, & quum acidis mineralibus eos liquores quotidie explorarem, deprehendi omnium humorum citissime bilem effervuisse (a), & citius adhuc humanam, quam bubulam; aliquanto tardius cruor corruptus cum acidis effervuit, omnium tardissime serum effervescentiam exhibuit. Quae porro effervescentiae iisdem phaenomenis distinguebantur, quae paullo ante memoravi (1); neque verò cum solis acidis mineralibus corrupti humores effervescabant, verum etiam cum dilutissimo aceto distillato conflabatur. Quae artificiali calori expositae fuerant humorum portiones foetorem citius, & effervescentiam dederunt; citius quinimo pervenerunt ad summum effervescentiae gradum, quem cum attigissent, continuato ejusdem loci calore effervescendi vim non solum amiserunt (b), sed ingratis-

simum

(a) Inter omnes humores citissime putrescere. Baglivi Oper. omn. p. 419.; & digestam sal alkali copiosius dare. Henninger de bile. Argent. 1705. apud Haller not. 2. ad §. 99.

(b) Imo serum in hypoc. ad 35. calido nunquam effervuit, argumento dicendi alkali in sero natum ex eo caloris gradu dissipatum fuisse ea portione, qua gignebatur.

num foetorem in herbaceum, ac minime injucundum odorem commutarunt (c). Caeterum multo citius plerumque prodiit foetor, quam alkalescentia, idemque tardius desit.

7. Dixi corruptos humores cum acidis mineralibus effervuisse, quod ut clarius designem, notare juvat me ut plurimum aqua forti usum, quae diluta admodum erat, nec ullum, vel minimum excitabat motum aquae communi admixta; tantumque abest, ut acidorum concentrationi tribuenda sit effervescencia (d), ut potius putem, si nimia sit eorumdem concentratio, effervescenciam inde minorem reddi posse ex eo vel maxime, quod cito nimis, arctiusque ex acidis concrecentes animales humores effervescenciae motui resistent: adhibito enim aceto distillato, quod corruptos humores nequaquam coagulabat, vehementem pariter oriri effervescenciam deprehendi; imo aliquando ex admixto aceto distillato totum corruptum serum in spumam abiisse.

8. Jam vero dum Clariss. Pringle experimenta perpendo, adverto eundem aliquando partes putrescentes caloricentum graduum Thermometri Fahrenheitiani (qui quidem calor triginta gradibus Reaumurianis fere respondet) exposuisse, in quo calore animales humores citius quidem putrescunt, veruntamen eadem celeritate, ac temporis brevitate ex putrescentia acquisitam alkalescentiam amittunt; cum itaque limites temporis, inter quos ex eo calore putrescentes humores alkalinam indolem ostendunt, angusti admodum sint, fieri facile potuit, ut nulla alkalescen-

(c) Bilis in loco tepido mox rancescit, graviter olet, & post longum tempus ambrae odorem contrahit. Boerh. in praelect. ad §. 99. ad verbum *acescentibus*. Quod vero de bile docuit Boerhaave, id generatim in omnibus humoribus tepido loco putrescentibus obtinere comperi.

(d) Quemadmodum in bile sana contingit, quae cum fortissimis acidis effervescit, observante Verehyeno, & Hombergio. Mémoir. de l'Acad. des Scienc. 1700. eo fere modo, quo aqua ipsa ab oleo visnoli incalcescit. Boerh. Elem. Chim. tom. 11. pag. 301.

lescentiae signa obtinuerit, si intra eosdem limites non instituerit experimentum, videlicet si paullo ante quam alkali genitum fuisset, vel paullo postquam in auras abiisset, corruptos humores exploraverit. Praeterea etiamsi intra illos ipsos limites tentasset experimentum, cum tamen ea proportione, qua alkali gignitur, magna ex parte ex ambienti calore in auras dissipetur, eo pacto non nisi levia alkalescentiae indicia eruere debuit, dum tamen ex minore caloris gradu evidentissima sum assecutus. Si igitur humoribus ad eum caloris gradum putrefactis semper usus fuisset Clariss. Pringle, ex proposita interpretatione nostra experimenta cum ipsius experimentis conciliari posset: sin minus, vel varietati individuorum, ex quibus humores educti fuerant (1. 3.), vel vario gradui concentrationis acidorum (7), vel alii, quam ignorem, causae diversitas adscribenda erit.

9. Sanguinem, dum e vena flueret, continua quassatione solvebam, quassatum deinde putrescere sinebam; rubens, & floridus, qui apparuerat color, pedetentim mutabatur, & in atrum, nigrumve vergebat, quae quidem mutatio non eodem tempore totam sanguinis massam inficiebat, sed a superiori parte incipiens temporis progressu sensim ad inferiorem propagabatur.

10. Si vero sanguis ita quassatus fuisset, & tardius putrescebat, & tardius praebebat alkalescentiae indicia, quam cruor a sero sejunctus, quod scilicet prae omnibus humoribus serum tardissime putrescat.

11. Cum propositis experimentis comperissem alkali in auras avolare ex miti caloris gradu, experiri adhuc volui, an non illud ipsum alkali colligere possem, ac retinere. Vitreo itaque alembico serum sanguinis ex febricitantibus paucas ante horas eductum excepi: alembicum reposui in hypocausto inter viginti quinque, & viginti octo Thermometri Reaumuriani gradus calente, collum alembici per
fora-

foramen in operculo ligneo hypocausti apertum trajiciebatur eo consilio, ut eidem adaptatum capitellum cubiculi, decem circiter ejusdem Thermometri graduum, temperiem servaret, & exhalans vapor inibi colligi, & in liquorem posset condensari: capitelli rostro phialam agglutinaui, quae collectum liquorem reciperet; alternis diebus obtinebam distillati liquoris drachmas tres, cui acida admiscens, varium, vario tempore, consequebar effectum. Portio, quae primum adscenderat, feri odorem, & saporē referebat, limpida erat, & diaphana, neque cum acidis, neque cum alkalicis effervescebat: portio, quam altera vice obtinui, foetidum quidem, modice tamen olebat; ejusdem ferme saporis erat, & pelluciditatis ac prima, atque in his cum secunda conveniebat tertia: nulla huc usque effervescencia. Quarta portio foetebat graviter, turbida erat, & opaca, coloris subalbentis, nullam exhibuit effervescencia, sed levem rubelli coloris tincturam ab admixtis acidis assequebatur. Quinta portio, quae scilicet post dies decem distillaverat, limpida iterum apparuit, admixtis acidis effervescencia dedit cum sibilo, qui admotus ad aures vase percipi poterat, bullas, spumamque excitavit (*). Sexta portio itidem limpida, debilius efferebat. Cum jam nihil liquoris ex eo caloris gradu distillare observarem, alembicum frēgi, ut residuum examini subjicerem; crustam efformaverat glutinosam subrusam, corio similem, quae pessimum foetorem emittebat, nullum tamen, vel levissimum affusis acidis indicium dedit effervescenciae. Ex hoc experimento patere arbitror viginti quinque inter, & vigintiocto caloris gradus alkali dissipari, quod si colligatur, effervescat, massam inde relinqui foeten-

(*) Hoc experimentum tentavi matutinis horis, cum adesset D. Cigna: horis vero vespertinis, cum illud Clariss. D. Bruni observandum praebere, eventu quidem non caruit, sed minor inde nata est effervescencia: Heliotropii tinctura huic liquori admixta minime coloris mutationem passa est.

rentissimam utique, sed emissio alkali ad effervesendum ineptam.

12. Cum sanguinem intra vas accurate obturatum servassem, diutius alkalescentem indolem retinuit, etsi calori vixingintiquinque graduum expositus fuisset; dum vero obturaculum educerem magno impetu vapores erumpebant, quibus totum cubiculum tetro admodum odore inficiebatur: vaporum explosio orta videtur ab aëre per putrescentiam extricato. Ex quo experimento intelligi potest, cur intra vasa humani corporis humores vix foetentes jam alkali contineant (§. 4. n. 1.), cumeducti, & in apertis vasis servati gravem foetorem prius acquirant, quam ullum alkali indicium praebeant (6): nempe intra vasa humani corporis, ubi primum alkali gigni incipit, retinetur, cum in apertis vasis exhalans, tum demum percipi possit, quando majori copia gignitur, quam in auras dissipetur.

13. Quoniam vero serum integrum post decem demum dies alkali emisit (11), nonnisi post illud temporis intervallum corruptum fuisse censeo, tum quod clauso in vase tardius humores corrumpantur, tum quod inter illos serum tardissime putrescat: quod si corruptum jam humorem distillationi commissem, minime dubitabam protinus alkali proditutum; propterea cupiebam corruptis humoribus idem experimentum capere, quod sero sano institueram, ut & tempus definirem, quo alkali distillare inciperet, & collecto distillante liquore, eam coloris caerulei vegetabilis mutationem iterum tentare, quam ob cunctationem praecedenti experimento obtinere nequiveram. Sanguinem itaque putrefactum, & ex putrefactione cum acidis effervescentem (quem solum alkalescentem humorem tum habebam in promptu) alembico inclusi vitreo, eidemque caloris gradui exposui eodem apparatu, quem in superiori experimento adhibueram. Et quum prima die stillantes liquoris drachmas duas acidis variis miscerem, vehementem effervescentiam observavi, eum-

eumdemque liquorem succo violarum instillans, color viridis non minus elegans ortus est, quam ex affuso spiritu c. c. oriretur, inductoque rubore ex admixta aqua forti, is nova distillati liquoris affusione deletus est, & violaceus color restitutus. Liquor, qui per quinque sequentes dies distillavit, eandem alkali notas retinuit, quibus elapsis cum nihil amplius distillare observarem, alembicum fregi, & ad ejus fundum crustam inveni descriptae (11) similem, sub qua portio ad syrupi consistentiam redacta recondita erat, quae alkalica adhuc indolem ostendebat, sed levem, adeo ut spatium duodecim horarum, per quod super fenestram, cujus temperies circa decem gradus Thermometri Reaumuriani erat, dissipato alkali, nulla ipsius vestigia remanserint.

14. Igitur & effervescencia, & colorum mutatione constat verum alkali illud esse, quod in humoribus putrefactis natum levissimo calore in auras dissipatur. Ipsis equidem humoribus putrefactis colorum mutationem tentare maluissim, nisi & seri corrupti turbida opacitas, & sanguinis rubor, ac bilis flavedo ambiguum de hisce experimentis iudicium effecissent; limido itaque exhalante humore eadem experimenta instituere tutius esse putavi, ut omne erroris periculum declinarem.

15. Quum foeteret gravissime retiduum distillationis, quamquam omni alkali orbatum fuisset, manifestum videtur ab alkali foetorem exaltari quidem posse, & magis penetrantem effici, non autem ab eodem produci, quandoquidem superest eo sublato.

16. Quoniam tamen continuato calore non solum alkaliescentia, sed & foetor simul perit (6), videtur is odor a volatilibus admodum particulis etiam proficisci, sed quae ab alkali volatili dissimiles sint, & plerumque citius gignantur, tardiusque dissipentur, cum ante alkaliescentiam, & post ipsam foetor plerumque percipiatur (8). Praeterea vero aliquando alkaliescentia adesse potest modico foe-

tori conjuncta, ut observavimus (13); vicissim maximus foetor absque alkalescentia, ut in postremo experimentoprehendimus (11. 12.). Ex quibus differentia inter foetidas, alkalinasque partes confirmari videtur, quam Clariss. Pringle alio argumento demonstraverat, animadvertens corruptae urinae halitus minime perniciosos esse, etsi prae caeteris corruptis corporibus maximam alkali salis quantitatem contineat; cum corruptorum aliorum humorum halitus infesti admodum sint, ex quo efficitur eos ab alkalici salis natura discrepare.

17. Quae cum ita sint, videtur alkali volatile non esse productum necessarium putrefactionis, neque gradum alkalescentiae gradui putrefactionis respondere, sed nativa salia oleis permixta vi putrefactionis volatilia reddi, si de stirpium partibus sermo sit, si vero de partibus animalium, videtur alkali actione viscerum jam inchoatum, aut aliis adhuc elementis involutum ex putrefactione perfici, aut extricari: quapropter eo major quantitas alkali salis ex putrefactione nascatur, quo major sit in corporibus eidem expositis salium, aliorumque elementorum quantitas, quae salibus permixta volatilitatem alkalinam eisdem impertiri possunt. Si enim consideremus stirpes acescentes, & acidum in distillatione emittentes, postquam solidis animalium partibus subactae in sanguinem, aut humores conversae sunt; vix accescere (f), & parum acidi distillando emitte-re (g), sed fere statim putrescere, & in distillatione copiosum alkali acidi loco praebere; si consideremus alkali ex corporibus putrefactis citius adhuc in distillatione prodire (h); si animadvertamus actione viscerum, & putredine reliqua salia fere omnia destrui, nec in corruptorum corporum

(f) Macquer elem. de chym. theor. cap. 15. pag. 173. 174., & elem. de chym. pratiq. tom. 2. pag. 377. 380.

(g) Id. tom. cit. pag. 381., & seq.

(h) Id. tom. cit. pag. 378. 379.

porum combustorum cineribus ullum alkali amplius reperiri (*i*); si perpendamus eos humores, qui maximam salium quantitatem continent, ut urinam, maximam alkali copiam putrescendo praeberere (*j*), confirmari videtur ea, quam sequimur, Chymicorum sententia, qui censent salia volatilia a reliquis salibus ortum ducere, quae vi viscerum animalium putredine, igne ita immutentur, ut alkalica evadant, nullo superstite pristinae formae vestigio (*k*). Inde vero intelligi posset, cur salia volatilia putredinem arcere possint (*l*), non secus, ac reliqua salia, quamquam ex putredine ortum ducant: quantitas enim alkalinorum salium per putredinem productorum respondet quantitati salium nativorum praeexistentium, quae porro salia cum arcendae putredini non sufficerent, mirum non est genitum alkali ejusdem progressui impediendo ineptum fuisse: quod si nativa salia majori copia praexistant, videtur utique, & genitum alkali putredinis progressum retardaturum: urina enim quae salibus copiose referta est, non tam corrumpitur, nec ejusdem corruptae halitus adeo perniciosi sunt, quemadmodum aliorum humorum (*m*), quod non aliunde, quam a praeexistentium salium, & geniti inde alkali copia, & efficacia repetendum esse videtur.

18. Urina sana nonnisi trium dierum intervallo ita putrescebat, ut cum acidis effervesceret; veruntamen urina hominis putrida febre laborantis brevi tempore, spatio nimirum vigintiquatuor horarum, hujusmodi alkalescentiam obtrahit. Sanguis ejusdem hominis multo quoque citius, quam sanguis ab homine pleuritico eductus alkalescentiae indi-

(*i*) Id. tom. cit. pag. 380. 381.

(*j*) Pringle Tr. sur les sub. sept., & antisept. mémoire 1. exper. 2. pag. 161.

(*k*) Macquer l. ult. cit., & tom. eod. pag. 343. 344. 349. 350.

(*l*) Quod, & Pringle testatur (l. o. mem. 1. exp. 2. 3.), & ego pluries expertus sum, & propriis etiam experimentis confirmavit Cl. Gilbertus in disp. de putred. Lips. 1753. §. 7. pag. 13.

(*m*) Pringle loc. cit. ad not. j.

indicia ostendit. Sed haec spectant ad aliam classem experimentorum, quae in tempus aliud differenda esse constitui, ut opportunitatem nactus morbosos humores explorare, atque ex phaenomenorum comparatione ea deducere possim, quae morborum, eorundemque indoli detegendae, aut therapejae perficiendae apta videbuntur.

19. Nec vero in gravissima quaestione propriis tantum oculis fidere volui, sed Clariss. D. Bruni Anat. Profefs., & Londinensem Socium rogavi, ut experimentis meis inreresset, ut & errores, qua est solertia, praecaveret, & auctoritate sua experimentorum veritatem tueretur.

P. S. Doctissimus Navier (n), quum carnem bubulam vasis accurate obturatis, ac glutinatis inclusam putrefactioni commisisset in gradu caloris inter nonum, & vigesimum Thermometri Reaumuriani, postquam in liquamen, & putrilaginem resolutam fuisse observavit, per vitream retortam cum excipulo accurate glutinatam, arenae balneo distillavit, & liquorem clarum, subalbidum, ac foetentem primum obtinuit, ex quo caerulea carta, nonnihil rubra facta est: hunc tamen liquorem alkalino volatili sale refertum esse comperit, cum superaffuso alkalici fixi liquore spiritus volatiles urinosi ex miscella prodierint; aucto deinceps igne, donec retorta candesceret, distillare adhuc continuavit per horae quadrantem similis liquor pauculo oleo imbutus, postremo sal volatilis albus, concretus, vegetationis specie, modica quantitate ad retortae collum depositus est, & vapores, qui adhuc per horae quadrantem prodierunt oleum crassum, ambrei coloris suppeditarunt. Cum vero laudatus Auctor incorruptam carnem arenae balneo similiter distillasset, liquor, qui eo calore prodit, lim-

(n) Postquam mea haec experimenta in aliquem ordinem disposuissem, ut typis committerem Celeb. Navier dissertationem de ossium mollitie legendam praebuit Clariss. Bertrandi, in qua pag. 33., & seqq. Clariss. Viri citata experimenta reperi.

limpidus erat, nullumque alkalescentiae indicium exhibuit, nec nisi violento igne hujusmodi demum sales prodierunt. Quae quidem Clar. Viri experimenta nostris egregie consentire videntur : nam & miti caloris gradu ad putrescentiam usus est, & vasis exacte obruratis corrumpendam carnem inclusit, ac propterea alkali retinuit, quod liquore primum extillante solutum levissimo calore prodiit, cum ex integris carnibus, nonnisi per auctam vim ignis demum educeretur (o).

- (o) Idipsum in partibus omnibus animalibus obtinere, ut corruptae levissimo caloris gradu alkali distillando praebeant, integrae majorem ignis vim requirant, ut id alkali emittant, Clariss. Macquer docuit Chym. pratiq. loc. cit. ad not. h.



FASCICULUS STIRPIUM

Sardiniae in Dioecesi Calaris lectarum

A MICHAELE ANTONIO PLAZZA

CHIRURGO TAURINENSI,

Quas in usum Botanicorum recenset

CAROLUS ALLIONUS.

A CANTHUS foliis sinuatis inermibus *Linn. spec. pl.* 639.
 Acanthus sativus, seu mollis Virgilio *C. B. pin.* 383.
Habitat in vinetis circa Calarim.

ACANTHUS foliis pinnatifidis spinosis *Linn. sp. pl.* 639.

Acanthus aculeatus *C. B. pin.* 383.

Crescit iisdem locis.

AEGYLOPS spica ovata aristis brevior *Linn. sp. pl.* 1050.

Festuca altera capitulis duris *C. B. the.* 151.

AGROSTEMMA glabra foliis lineari-lanceolatis, patulis emarginatis coronatis *Linn. sp. pl.* 436.

Lychnis foliis glabris calyce durior *Bocc. sic.* 27.

ANAGALLIS foliis cordatis amplexicaulibus, caulibus compressis *Linn. sp. pl.* 149.

Anagallis hispanica latifolia maximo flore *Tournef. inst.* 143.

ANTIRRHINUM foliis caulinis lanceolato-linearibus sparsis: radicalibus rotundis ternis *Linn. sp. pl.* 615.

Linaria annua purpuro-violacea, calcaribus longis, foliis imis rotundioribus *Magn. monsp.* 159.

ANTIRRHINUM procumbens ramosum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimis, floribus caudatis axillaribus.

Folia succosa, glabra, alterna, sessilia, supremis angustioribus elliptico acuminatis. Pedunculi foliis altiores, singulares, uniflori. Flos cyaneus cum hiatus clauso. Calcar floris acutum pedunculo subaequale, & florem longitudine aequans

- aegmans*. Capsula rotunda calyce minor. Eritne? Linaria
lusitanica maritima polygalae folio Tourn. *inst.* 169.
- ANTHEMIS caule ramoso, foliis pinnato-multifidis serratis,
calycibus villosis pedunculatis Linn. *sp. pl.* 895.
- Buphthalmum cotulae folio C. B. *pin.* 134.
- APHANES Linn. *sp. pl.* 123.
- Alchemilla minima montana Col. *ecphr.* 145.
- APHILLANTHES Linn. *sp. pl.* 294.
- Aphillanthes Monspeliensium Lob. *adv.* 190.
- ARBUTUS caule erecto, foliis glabris serratis, baccis poly-
spermis Linn. *sp. pl.* 395.
- Arbutus folio serrato C. B. *pin.* 460.
- Abunde in montibus septem Fratrum.*
- ARENARIA foliis, filiformibus, stipulis membranaceis vagi-
nantibus Linn. *sp. pl.* 423.
- Alfina spergulae facie minor, seu spergula minor sub cae-
ruleo flore C. B. *pin.* 251.
- ARISTOLOCHIA foliis cordatis subsessilibus, obtusis, caule
infirmo, floribus solitariis Linn. *sp. pl.* 962.
- Aristolochia rotunda flore ex purpura nigro C. B. *pin.* 307.
- Provenit in agro di Siturgius.*
- ARUM a caule foliis cordato-oblongis, spatha bifida, spadice incurvo Linn. *sp. pl.* 966.
- Arisarum latifolium Clus. *hist.* 2. p. 73.
- Circa Calarim, & in agro S. Pantaleonis.*
- ASPHODELUS caule nudo, foliis strictis subulatis striatis sub-
fistulosis Linn. *sp. pl.* 309.
- Asphodelus minor Clus. *hist.* 1. p. 197.
- ASPHODELUS caule nudo, foliis ensiformibus carinatis lae-
vibus Linn. *sp. pl.* 310.
- Asphodelus albus ramosus mas C. B. *pin.* 28.
- Asphodelus albus non ramosus C. B. *pin.* 28.
- BARTSIA foliis superioribus alternis serratis, floribus latera-
libus Linn. *sp. pl.* 602.

Alectorolophos italica luteo-pallida *Barrel. rar. ic.* 665.

BARTSIA foliis oppositis lanceolatis obtuse ferratus *Linn.*

sp. pl. 602.

Trixago apula unicaulis *Col. ecphr.* 1. p. 199.

BULBOCODIUM foliis lanceolatis *Linn. sp. pl.* 294.

Colchicum vernum Hispanicum *C. B. pin.* 69.

Prope oppidum Ulassay secus torrentem.

BUFONIA *Linn. sp. pl.* 123.

Herniaria angustissimo gramineo folio erecta *Magn. hort.* 97.

BUNIAS siliculis ovatis laevibus ancipitibus *Linn. sp. pl.* 670.

Eruca maritima Italica siliqua hastae cuspidi simili *C. B. pin.* 99.

In sabulosis mari proximis, & maxime stagnis exsiccat.

BUPLEURUM involucellis pentaphyllis acutis: universali diphylo, foliis lanceolatis petiolatis *Linn. sp. pl.* 237.

Bupleurum folio subrotundo sive vulgatissimum *C. B. pin.* 278.

BUPLEURUM caule dichotomo subnudo, involucris minimis acutis *Linn. sp. pl.* 238.

Bupleurum folio rigido *C. B. pin.* 278.

Utrumque inter-segetes agri di Sardara.

BUPHTHALMUM calycibus acute foliosis, ramis alternis, foliis lanceolatis amplexicaulibus integerrimis *Linn. sp. pl.* 903.

Aster luteus foliis ad florem rigidis *C. B. pin.* 266.

CAMPANULA caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis *Linn. sp. pl.* 169.

Erini seu rapunculi minimum genus *Col. phytob.* 122.

CAPPARIS aculeata *Linn. sp. pl.* 503.

Capparis spinosa fructu minore, folio rotundo *C. B. pin.* 480.

Rupes circa Calarim inhabitat.

CELTIS foliis ovato-lanceolatis *Linn. sp. pl.* 1043.

Lotus fructu cerasi *C. B. pin.* 447.

CENTAUREA calycibus laevibus, squammis ovatis mucronatis,
foliis ciliato-spinosis.

Caulis erectus, striatus, ramosus, durus, pedalis, aut paulo elatior ramis unico flore terminatis. Folia prima dentato-lyrata; reliqua integra, lineari-lanceolata: omnia denticulis spinulas exerentibus, & pinnatis instructa, erecta, firmula, glabra. Flos luteus. Calix ex squammis laevibus, arte imbricatis, in spinulam brevem abeuntibus.

CERASTIUM floribus pentandris petalis integris *Linn. sp. pl. 439.*

CISTUS arborescens, foliis sessilibus utrinque villosis rugosis, inferioribus ovatis basi connatis; summis lanceolatis *Linn. sp. pl. 514.*

Cistus mas angustifolius *C. B. pin. 464.*

CISTUS arborescens, foliis oblongis tomentosis incanis sessilibus supra avenis, alis nudis *Linn. sp. pl. 524.*

Cistus mas, folio oblongo-incano *C. B. pin. 464.*

CISTUS arborescens, foliis ovatis petiolatis utrinque hirsutis, alis nudis *Linn. sp. pl. 524.*

Cistus foemina folio salviae *C. B. pin. 464.*

CISTUS herbaceus exstipulatus, foliis oppositis trinerviis, racemis ebracteatis *Linn. sp. pl. 526.*

Helianthemum flore maculoso *Col. ecphr. 2. p. 78.*

Omnes hi cisti sicca pascua amant, & abunde nascuntur circa Oppidum Villanova Tullo.

CLEMATIS cirrhis scandens *Linn. sp. pl. 544.*

Clematis peregrina foliis pyri incis: nunc singularibus, nunc ternis *Tournef. cor. 20.*

CLEPTEOLA filiculis unilocularibus monospermis *Linn. sp. pl. 652.*

Jonthlaspi minimum spicatum lunatum *Col. ecphr. 1. p. 281.*

CONVOLVULUS foliis sagittatis utrinque acutis, pedunculis unifloris *Linn. spec. pl. 153.*

Convolvulus minor arvensis *C. B. pin. 294.*

CONVOLVULUS foliis sagittatis postice truncatis, pedunculis unifloris *Linn. sp. pl.* 156.

Convolvulus major albus *C. B. pin.* 294.

CONVOLVULUS foliis palmatis cordalis sericeis: lobis repandis, pedunculis bifloris *Linn. sp. pl.* 156.

Convolvulus argenteus folio altheae *C. B. pin.* 194.

CRITHMUM foliolis lanceolatis carnosissimis *Linn. sp. pl.* 246.

Crithmum, seu foeniculum maritimum minus *C. B. pin.* 288.

Ad rupes, quæ mare spectant.

CROTON foliis rhombeis repandis, capsulis pendulis, caule herbaceo *Linn. sp. pl.* 1004.

Ricinus, ex qua paratur Tournesol Gallorum *Tourn. Nifsole ad. Paris.* 1712. p. 337.

Abunde in arvis.

CYCLAMINUS foliis cordatis acutis angulose dentatis.

Cyclamen folio anguloso *C. B. pin.* 308.

Ubique in celsis montibus.

Folia tenuiora, quam in vulgari cyclamino, & ampliora angulis, seu dentibus brevissima spinula notatis. Corolla purpurea retroflexa.

CYNOSURUS paniculae spiculis sterilibus pendulis ternatis, floribus aristatis *Linn. sp. pl.* 73.

Gramen panicula pendula aurea *C. B. the.* 33.

CYTISUS floribus lateralibus, foliis hirsutis, caule erecto striato *Linn. sp. pl.* 740.

Cytisus monspessulanus medicae folio, siliquis dense congestis, & villosis *Tournef. inst.* 648.

DAPHNE floribus sessilibus aggregatis axillaribus, foliis ovatis utrinque pubescentibus nervosis *Linn. sp. pl.* 356.

Thymelaea foliis candicantibus, & serici instar mollibus *C. B. pin.* 463.

Abunde circa Ulaffay.

DRABA caule non ramoso, foliis cordatis acutis dentatis sessilibus.

Cau-

Caulis simplicissimus, pedalis, in longo racemo floriger. Folia piloso-hispida acute terminata, & acuis dentibus praedita, non amplexicaulia.

ERICA antheris bicornibus inclusis, corollis campanulatis longioribus, foliis quaternis patentissimis, caule subarboreo tomentoso *Linn. sp. pl. 353.*

Erica maxima alba C. B. pin. 485.

ERVUM pedunculis subbifloris, feminibus globosis quaternis *Linn. sp. pl. 738.*

Vicia segetum singularibus aliquis glabris C. B. pin. 345.

ERYNGIUM foliis radicalibus subrotundis plicatis spinosis, capitulis pedunculatis *Linn. sp. pl. 233.*

Eryngium maritimum C. B. pin. 386.

ERYNGIUM foliis radicalibus planis quadratis sublobatis, caulinis digitatis, pedunculo terminali.

Eryngium capitulis psillii Bocc. rar. 88.

Copiose in pascuis.

Radix tuberosa obscura; ex qua folia plura longe petiolata plana dentato-spinosa, quadrato-orbiculata nunc integra, nunc subtriloba. Prima caulina profundius triloba, aut quinqueloba, adhuc petiolata; quae, sequuntur, sessilia, quinquedigitata foliolis lineari-lanceolatis, & ciliato-spinosis. Ex summis foliorum alis, aut summa planta pedunculus floriger cum uno, alterove sessili folio.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma involucellis lanceolatis, foliis linearibus *Linn. sp. pl. 456.*

Tithymalus sive esula exigua C. B. pin. 291.

EUPHORBIA umbella subquinquefida simplici, involucellis ovatis: primariis triphillis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoso *Linn. sp. pl. 457.*

Tithymalus maritimus spinosus C. B. pin. 291.

In monte Esterfili frequens.

FERULA foliolis linearibus longissimis simplicibus *Linn. sp. pl. 247.*

Ferula

Ferula femina Plinii *C. B. pin.* 148:

FUMARIA subcirrhosa ex alis florigera, segmentis foliorum bilobis, pericarpis rotundis monospermis.

Abunde circa Calarim.

Caules erecti, spithamæi, suclati, laeves, ramosi extremis ramis quandoque in cirrhum desinentibus. Folia petiolata, glauca, profunde, & inaequaliter trifida segmentis bilobis ovalibus cum spinula, alterna, sed ad ramorum ortum opposita. Floralium segmentum unum saepe bilobum, reliqua integra sunt. Nudus pedunculus foliis altior flores ferit fumariae officinalis in brevem spicam congestos.

GALIUM foliis quaternis ovatis, aculeato-ciliatis, seminibus hispidis *Linn. sp. pl.* 108.

Rubia semine duplici hispido latis, & hirsutis foliis *Bocc. rar.* 6.

Folia glabra, vix nervosa. Panicula axillaris cauli perpendicularis.

GALIUM foliis quaternis ovatis laevibus obtusis, panicula dichotoma, seminibus hispidis *Linn. sp. pl.* 108.

Rubia quadrifolia semine duplici hispido *Bauh. hist.* 3. p. 718.

GALIUM foliis verticillatis lineari-setaceis, pedunculis folio longioribus *Linn. sp. pl.* 107.

Galium nigro-purpureum montanum tenuifolium *Col. ecphr.* 1. p. 298.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis sublobatis *Linn. sp. pl.* 680.

Geranium folio altheae *C. B. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis pinnatis acutis sinuatis *Linn. spec. pl.* 680.

Geranicum acu longissima *C. B. pin.* 319.

GERANIUM pedunculis bifloris, calycibus pyramidatis angulatis rugosis, foliis quinquelobis rotundatis *Linn. spec. pl.* 682.

Geranium lucidum saxatile *C. B. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis bifloris, foliisque rameis alternis, caule ramoso diffuso, calycibus muticis *Linn. sp. pl.* 682.

Geranium columbinum villosum petalis bifidis purpureis *Vaill. Paris. 79. t. 15. f. 3.*

GERANIUM pedunculis bifloris, foliis quinquepartito-multifidis angulatis: laciniis acutis, capsulis glabris, calycibus aristatis *Linn. sp. pl.* 682.

Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculo longissimo, caule prostrato *Hall. helv.* 367.

GENTIANA dichotoma, ramis unifloris, corollis quinquefidis infundibuli-formibus, calycibus membranaceis.

Centaurium luteum novum *Col. ecphr.* 2. 77.

Caules ad summum spithamaei, subrotundi, glabri. Folia sessilia, opposita, ovata. Caules irregulariter dichotomi semel, aut bis. Corolla lutea segmentis ovato acutis, & tubo calycem superante. Tubi longitudo bis, & ultra corollae limbum metitur. Calix decem striatus, membranaceo-transparent segmentis capillaribus.

GLADIOLUS foliis ensiformibus, floribus distantibus *Linn. sp. pl.* 36.

Gladiolus floribus uno versu dispositis *C. B. pin.* 41.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus *Linn. sp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum nostras sthœchadis citrinae foliis tenuissimis *Pluk. alm.* 172. t. 298. f. 2.

GNAPHALIUM caule simplicissimo, foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo composito terminali.

Circa oppidum Villanova Tullo.

Tomentosa stirps est palmaris altitudinis. Folia subvirent erecta, mollia, ambitu minutim & inaequaliter denticulata.
Flo-

Flores rotundi parvi ex citrino, & viridi subrubentes in densum corymbum conglobati.

GYPHOPHILA foliis mucronatis recurvatis, floribus aggregatis *Linn. sp. pl.* 406.

Caryophyllus saxatilis, ericæ foliis umbellatis corymbis *C. B. pin.* 211.

In promontorio S. Eliae circa Calarim.

HERNIARIA hirsuta *Bauh. hist.* 3. p. 379.

HESPERIS caule erecto ramoso, foliis cordatis amplexicaulis serratis villosis *Linn. sp. pl.* 664.

Leucojum minus rotundifolium flore purpureo *Barrel. ic.* 876.

HELIOTROPIMUM foliis ovatis tomentosis integerrimis rugosis, spicis conjugatis *Linn. sp. pl.* 130.

Heliotropium majus Dioscoridis *C. B. pin.* 253.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis occultatis, capitulis terminalibus, caule erecto *Linn. sp. pl.* 207.

Paronychia narbonensis erecta *Tournef. inst.* 508.

JUNIPERUS foliis quaternis patentibus subulatis mucronatis *Linn. sp. pl.* 207.

Juniperus major bacca refuscente *C. B. pin.* 489.

JUNIPERUS foliis oppositis erectis decurrentibus oppositionibus pixidatis *Linn. sp. pl.* 1039.

Sabina folio cupressi *C. B. pin.* 487.

LAGURUS spica ovata *Linn. sp. pl.* 81.

Gramen alopecuroides spica rotundiore *C. B. the.* 56.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis diphillis, leguminibus ovatis compressis: dorso canaliculatis *Linn. spec. pl.* 740.

Lathyrus sativus flore purpureo *C. B. pin.* 344.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphillis, stipulis sagittato-cordatis *Linn. sp. pl.* 279.

Vinea lutea foliis convolvuli minoris *C. B. pin.* 345.

LAPSANA calycibus fructus torulosis depressis obtusis sessilibus *Linn. sp. pl.* 811.

Chon-

Chondilla verrucaria foliis cichorii viridibus *C. B. pin.* 130.
Ubique ad vias.

LAPSANA calycibus fructus undique patentibus: radiis subulatis, foliis lyratis *Linn. sp. pl.* 812.

Rhagadiolus lapsanæ foliis *Tournef. cor.* 36.

LINUM calycibus acuminatis, foliis lanceolatis sparsis strictis scabris acuminatis, caule tereti basi ramoso *Linn. sp. pl.* 278.

Linum sylvestre caeruleum folio acuto *C. B. pin.* 214.

LINUM calycibus acutis, foliis lineari lanceolatis alternis, paniculae pedunculis bifloris *Linn. sp. pl.* 279.

Linum sylvestre minus flore luteo *C. B. pin.* 214.

In pascuis S. Pantaleonis.

LINUM calycibus, foliisque lanceolatis strictis mucronatis: margine scabris *Linn. sp. pl.* 279.

Lithospermum linariae folio monspeliensium *C. B. pin.* 259.

LOTUS capitulis aphillis, foliis sessilibus quinatis *Linn. sp. pl.* 776.

Dorychnium monspeliensium *Lob. ic.* 51.

LUPINUS calycibus alternis appendiculatis: labio superiore bipartito, inferiore integro *Linn. sp. pl.* 721.

Lupinus angustifolius caeruleus elatior *Ray hist.* 908.

MOLLUGO foliis quaternis obovatis, panicula dichotoma *Linn. sp. pl.* 89.

Anthillis marina alfinefolia *C. B. pin.* 282.

MYOSOTIS seminibus nudis: foliorum apicibus callofis *Linn. sp. pl.* 131.

Echium scorpioides palustre *C. B. pin.* 254.

OENANTE umbellularum pedunculis marginalibus longioribus ramosis masculis *Linn. sp. pl.* 254.

Oenapthe prolifera apula *C. B. pin.* 163.

ONONIS trifolia viscosa, hirsuta, pedunculis congestis, floribus pendulis *Sauv. monsp.* 190.

Anonis pusilla villosa, & viscosa purpurascente flore *Tourn. inst.* 408.

Folia cuneiformia in apice denticulata, trifoliata; sed floralia simplicia. Stipulae lanceolatae, non setaceae. Spicae ramos, & caulem terminans. Flores ex alis stipularum prodeunt singulares. Pedunculus petiolo longior. Flos calyce minor reflexus. Fructus longitudine calycis: semina nigra angulata decem circiter.

ONONIS pedunculis unifloris filo terminatis, foliis simplicibus *Linn. sp. pl.* 718.

Anonis lutea viscosa latifolia minor, flore pallido *Barrel. ic.* 1239.

Anonis viscosa spinis carens lutea latifolia annua *Magn. monsp.* 21.

Folia brevis petioli ope insidentia retangulae stipulae, orbiculata, aut oblonga, minutim denticulata. Pedunculi uniflori, axillares, stipula longiores, terminati filo folia superante. Flos pentaphyllo calyce minor. Fructus longior calyce, aequalis stipulae semina recondit tria, aut quatuor reniformia. Planta tota villosa est.

ORNITHOPUS foliis pinnatis, leguminibus subarcuatis *Linn. sp. pl.* 743.

Ornithopodium minus *C. B. pin.* 350.

OTHONNA foliis pinnatifidis tomentosis: laciniis sinuatis; caule fruticoso *Linn. sp. pl.* 927.

Jacobaea maritima *C. B. pin.* 131.

Ad maris litus abunde.

PASSERINA foliis carnosissimis extus glabris, caulibus tomentosis *Linn. sp. pl.* 559.

Thymelaea tomentosa foliis sedi minoris *C. B. pin.* 463.

PHILLYREA foliis cordato-ovatis serratis *Linn. sp. pl.* 8.

Phillyrea folio leviter serrato *C. B. pin.* 476.

PLANTAGO foliis lineari-lanceolatis hirsutis, spica cylindrica erecta, scapo tereti foliis longiore *Linn. sp. pl.* 114.

Flo.

Holosteum hirsutum albicans minus C. B. pin. 190.

PLANTAGO caule ramoso, foliis integerrimis, spicis foliosis *Linn. sp. pl. 115.*

Psyllium majus erectum C. B. pin. 191.

PLUMBAGO foliis amplexicaulibus *Linn. sp. pl. 151.*

Lepidium dentellaria dictum C. B. pin. 197.

POLYGONUM floribus pentandris trigynis axillaribus, foliis lanceolatis, caule stipulis oblecto fruticoso *Linn. sp. pl. 361.*

Polygonum maritimum latifolium C. B. pin. 280.

POLYPODIUM fronde bipinnata: pinnis lunulatis dentatis, stipite strigoso *Linn. sp. pl. 1090.*

Filix aculeata major C. B. pin. 358.

POTERIUM inerme caulibus subangulosis *Linn. sp. pl. 994.*

Pimpinella sanguisorba minus hirsuta C. B. pin. 160.

POTERIUM spinis ramosis *Linn. sp. pl. 994.*

Poterio affinis, foliis pimpinellae, spinosa C. B. pin. 388. Abunde circa Calarim.

PSORALEA foliis omnibus ternatis: pedunculis spicatis foliis longioribus *Linn. sp. pl. 763.*

Trifolium bitumen redolens C. B. pin. 327.

Ubique circa Calarim.

QUERCUS foliis ovato-oblongis indivisis, ferratisque, cortice integro *Linn. sp. pl. 995.*

Ilex oblongo ferrato-folio C. B. pin. 424.

Ubique frequens.

QUERCUS foliis ovato-oblongis indivisis ferratis subtrus tomentosis, cortice rimoso fungoso *Linn. sp. pl. 995.*

Suber latifolium sempervirens C. B. pin. 424.

QUERCUS foliis ovatis indivisis spinoso-dentatis glabris *Linn. sp. pl. 995.*

Ilex aculeata cocciglandifera C. B. pin. 425.

Abunde loco dicto Pedra de Fogu.

RESEDA foliis lanceolatis integris, calycibus quadrifidis *Linn.*
sp. pl. 448.

Luteola herba falicis folio *C. B. pin.* 100.

RESEDA foliolis alternis integerrimis, fructibus tetragynis.

Reseda minor incisifoliis *Barrel. ic.* 587.

Reseda foliis calcitrapae flore albo *Mor. hort. blef.*

RUBIA foliis senis *Linn. sp. pl.* 109.

Rubia sylvestris aspera *C. B. pin.* 33.

RUMEX floribus hermaphroditis, valvulis dentatis nudis reflexis *Linn. sp. pl.* 336.

Acetosa ocymi folio Neapolitana *C. B. pin.* 114.

RUMEX floribus dioicis, foliis lanceolato-hastatis *Linn. sp. pl.* 338.

Acetosa arvensis lanceolata *C. B. pin.* 114.

SAGINA caule erecto unifloro *Linn. sp. pl.* 128.

Alsine verna glabra *Vaill. parif. 6. t. 3. f. 2.*

SAXIFRAGA foliis caulinis palmato-lobatis, caulinis sessilibus, caule ramoso bulbifero *Linn. sp. pl.* 403.

Saxifraga bulbosa altera bulbifera montana *Col. ecphr.* 1. p. 318.

SCANDIX feminibus ovatis hispidis, corollis uniformibus, caule laevi *Linn. sp. pl.* 257.

Myrrhis sylvestris aequicolorum *Col. ecphr.* 1. p. 110.

SCANDIX feminibus subulatis, hispidis, floribus rostratis, caulibus laevibus *Linn. sp. pl.* 257.

Scandix cretica minor *C. B. pin.* 152.

SCROPHULARIA, foliis difformibus, pedunculis axillaribus aggregatis *Linn. sp. pl.* 610.

Scrophularia foliis laciniatis *C. B. pin.* 236.

SCROPHULARIA foliis cordatis: superioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris *Linn. sp. pl.* 621.

Scrophularia urticae folio *C. B. pin.* 236.

SERAPIAS bulbis subrotundis, necturii labio trifido acuminato petalis longiore *Linn. sp. pl.* 950.

Or-

Orchis montana italica flore ferrugineo , lingua oblonga
B. C. pin. 84.

SHERARDIA foliis omnibus verticillatis , floribus terminalibus
Linn. sp. pl. 102.

Rubeola arvensis repens caerulea C. B. pr.

SILENE hirsuta , petalis emarginatis , fructibus erectis alter-
nis hirsutis sessilibus Linn. sp. pl. 417.

Viscago cerastei foliis , vasculis erectis sessilibus Dill. elth.
416. t. 309.

SISON foliis caulinis subcapillaribus Linn. sp. pl. 252.

Arumi parvum foliis foeniculi C. B. pin. 159.

SPARTIUM foliis ternatis , ramis angulatis spinosis Linn. sp.
pl. 709.

Acacia trifolia C. B. pin. 392.

TAXUS foliis approximatis Linn. sp. pl. 1040.

Taxus C. B. pin. 505.

Occurrit in agro Ulassey ; de caetero rarus.

TEUCRIUM foliis integerrimis ovatis utrinque acutis , race-
mis secundis villosis Linn. sp. pl. 564.

Marum cortusi J. B. p. 242.

TEUCRIUM

Polium maritimum erectum monspeliacum C. B. pin. 221.

Polium monspessulanum J. B. 3. 299.

THLASPI siliculis subrotundis , foliis amplexicaulibus corda-
tis subserratis Linn. sp. pl. 646.

Thlaspi arvense perfoliatum majus C. B. pin. 106.

THYMUS erectus , foliis revolutis ovatis , floribus verticilla-
to-spicatis Linn. spec. pl. 591.

Thymus vulgaris folio latiore C. B. pin. 219.

Frequens circa Calarim.

TORDYLIUM umbella conferta , foliolis ovato-lanceolatis
pinnatifidis Linn. sp. pl. 241.

Caucalis semine aspero , flosculis rubentibus C. B. pr. 80.

Ad fossas prope oppidum Gerey.

TOR-

TORDYLIUM umbellis simplicibus sessilibus, feminibus exterioribus hispidis *Linn. sp. pl.* 240.

Caucalis nodosa echinato semine C. B. pr. 80.

Ibidem.

TORDYLIUM alterum majus *λεοκαρπος Col. ecphr.* 122.

TRIFOLIUM spicis villosis ovalibus, dentibus calycinis fetaceis aequalibus *Linn. sp. pl.* 768.

Trifolium arvense humile spicatum, sive Lagopus C. B. pin. 328.

TRIFOLIUM spicis ovalibus imbricatis, vexillis deflexis persistentibus, calycibus nudis, caule erecto *Linn. sp. pl.* 772.

Trifolium agrarium Dod. pemp. 576.

TRIFOLIUM caulibus simplicibus, spicis pilosis aphillis mollioribus subrotundis, foliolis cordatis.

Trifolium alopecurum spica globosa Barrel. ic. 1188.

Caules rotundi, villosi, spithamaei. Stipula ampla in duos lobos quadrato-ovales denticulatos divisa educit petiolum biunciale, quod jungit tria foliola denticulata, ex cuneiformi cordata, oxalidi similia. Spica subrotunda, compressa, terminalis. Calyces striati, sericeo villosi. Dentes calycini subaequales patentes, & tubo calycis longiores. Flos polypetalus calyci subaequalis.

TURRITIS foliis omnibus hispidis, caulinis amplexicaulibus *Linn. sp. pl.* 666.

Erysimo similis hirsuta non laciniata alba C. B. prodr. 42.

VERONICA floribus solitariis, foliis cordatis incisus pedunculo longioribus *Linn. sp. pl.*

Alfne veronicae foliis, flosculis cauliculis adhaerentibus C. B. pin. 250.

VERONICA floribus solitariis, foliis cordatis planis quinquelobis *Linn. sp. pl.* 13.

Alfne hederulae folio C. B. pin. 250.

VIBURNUM foliis integerrimis ovatis: ramificationibus subtus villosis-glandulosis *Linn. sp. pl.* 267.

Lau.

Laurus sylvestris corni foeminae foliis subhirsutis C. B.
pin. 461.

Vicia pedunculis multifloris, foliolis reflexis ovatis mucronatis, stipulis subdentatis Linn. sp. pl. 734.

Vicia maxima dumetorum C. B. pin. 385.

Vicia leguminibus sessilibus subbinatis erectis, foliis retusis, stipulis notatis Linn. sp. pl. 736.

Vicia sativa vulgaris semine nigro C. B. pin. 344.

Viola acaulis foliis cordatis, stolonibus reptantibus Linn.
sp. pl. 935.

Viola martia purpurea flore simplici odore C. B. pin. 119.
Rara in Sardinia planta crescit in agro Hierisu.



OBSERVATIONES

AMBROSII BERTRANDI.

Veteres Anatomici observationibus destituti de generationis opere parum, aut nihil intellexerunt; atque in summa rei obscuritate posteros vix aliquid esse intellecturos, nisi potius modos operis sequantur, pene desperandum est; Harvejus hanc methodum primus amplificavit, quam ipse quum sequeretur non nullas observationes cumulare contigit, quas modo nudas exponam. Primae institutae sunt circa corpora ovariorum, ut vocant glandulosa; neque de his, quae satis vulgaria sunt, transcribam. Quaeiebant Physiologi non nulli, an in virginibus intemeratis comperirentur, nec ita facile, atque constanter respondebant Anatomici. Santorinus vero per conjecturam rem adeo invenit, ut virginum morbos aliquos uteri a praecoci, & vehementi ipsorum intumescencia repetendos esse existimaverit. Cl. Morgagnius rem maxime cohibuit, ut nullum hujusmodi corpus in virginibus, quod cum iis nuptarum comparari posset, numquam observavisse scripserit (in epist. ad me dat. die XIII. Novembr. 1749.) Ego vero in puellis a decimo quarto ad vigesimum annum, quas non magis transactae vitae genus, quam partium genitalium intemerata integritas, & plenitudo virgines decessisse indicabant, in ovariis stigmata, seu granula quaedam observavi, quae corporum glanduloso rudimenta referrent; in aliis porro adeo perfecta, & turgentia vidi, ut totam amplitudinem suam acquisivisse facile putarem; imo in robusta, & succiplena puella hujusmodi corpus inveni, cujus papilla gan-

gangraena esset correpta, idque totum sanguine atro op-
pletum.

Corpora hujusmodi glandulosa in puellis veluti in masculis semen excitare crediderim; vesiculae seminales in his dilantur, semineque recens affluente replentur ad xii., vel xiv. vitae annum magis, vel non ita cito, eo quidem tempore, quo ephoebi pubertatem attingunt, nutritionis materia ultra corporis incrementi rationem in his tunc redundante, atque in prolificum semen evadente, siquidem nutritio, & generatio, idem pene naturae opus sint: Malpighius frequentissime in vitulis nuper natis unam, aut alteram vesiculam insignem deprehendisse scripsit, cui lutea substantia graminis instar adnascebatur; ego vero in animalibus hujus generis, atque aetatis flavescere vidi, non autem veluti adorientem lutea substantia; sed potius tinctura, quae facile abstergeretur, aut equidem solidam substantiam non comperi, quam veluti lutei corporis rudimentum asseverare possem, nec porro vesiculas adeo insignes in his potui deprehendere; asperam, leviterque tuberosam sentiebam ovarii superficiem, vesiculas non satis bene distinguebam. Nihilo secius veluti florum uterum undique, & in solido crescere hujusmodi corpora ostendam, si primum qualia sint, quando plena, perfectaue inveniuntur, indicavero.

Glandem referunt, quae profunde in ovario infixae papillam ad ejusdem superficiem porrigit, veluti segmentum minoris sphaerae majori appositum, & acretum: mammae papillae comparaveris; hujusmodi papilla saepius bene devoluta, terminataque videtur, alias nulla est, atque glandis ipsa convexitas aliqua parte protuberat, alias verrucam excisam, minus bene per ambitum terminatam inveniebam. Ovarium in transversum ovatum, anterius, posteriusque compressum est; ad latus externum, ut plurimum germinat corpus luteum, etsi in quacumque parte itidem inveniat;

niatur; in Vacca frequentissime maximam ovarii partem occupat, totum occupasse non semel vidi; in humanis ciceris, aut mediocris fabae crassitiem non raro excedit, in illis olivam refert, aut cerasum majus, in pecude, aut scropha humanorum amplitudinem sequitur, aut parum superat.

Simplex, & unum ut plurimum est, rarissime duo in eodem ovario, aut unum in utroque reperitur. At vero, quum praesens fuerit amplum, plenumque corpus luteum, alia minora quandoque occurrunt circumscripta, terminataque, vel tanquam, quod magis raro vidimus, majoris continuatas appendices; rarissime non invenimus maculas obscuras cinereas, subluteas, vel etiam nitide croceas profunde reconditas, aut veluti granula; aut papulas, quae mox sub ovarii tunica transparebant, aut etiam turgabant; in bestiis corpus luteum plenum, perfectumque perpetuo in eo reperiebatur ovario, quod ex latere eodem erat cornu gravidum, atque licet multiparae sint, numerus tamen luteorum corporum nequaquam ex embryonum numero est.

Tunicam habent sat crassam, renitentemque, quae vasculis plurimis sanguineis obducitur, eaque spermaticorum, uterinorumque fuisse soboles comperimus; venae magis, quam in aliis corporis partibus arteriarum amplitudinem excedunt. Exterius communi ovarii tunica, quae tenuior fit, obvolvitur, & cooperitur, quae & in id ipsum continuari videtur, circum circum qua parte ovario innititur fibris rubellis, compactis, reticulatis obducitur, quibus illud opus tribuerunt Anatomicorum aliqui, ut premerent, urgerentque ovulum foras e ovario in Fallopiam dictam tubam.

Vesiculas, seu ut ajunt, ova corpore glanduloso incrementum decrescere, & absumi scripserunt; ipse quidem alterum ovarium in corpus luteum evasisse nullis, aut paucissimis vesiculis duas vesiculas insigniter turgentes observavi in quodam luteo, ut ita dicam, ovario; alias plures usque ad viginti, & ultra, etiam corpus luteum non leviter

tur-

turgeret. Vidi non raro, quod rumente altero ovario ob corpus luteum, & vesiculas sat copiosas, alterum exiguum esset, & veluti extenuatum, idque saepius contigit: quae in ovario sunt reliquae vesiculae, luteo ut plurimum adiacent corpori, aliquas vidi, ut singula enarrem, ipsi papillae inhaerentes; memorata papilla saepissimae ad verticem foraminulo, quod usque in fundum corporis lutei continuatur, ductum ideo, seu canalem efformans, perforatur. Hujusmodi canalis membrana fit subcinerea, aut albida, cujus appendices in latera sparguntur, affigunturque, seu continuantur eidem membranae exteriori corporis lutei. Non autem raro hujusmodi membrana vix apparet, aut etiam deficere videtur, vel etiam nullo pacto pertusum observatur luteum corpus, etsi per axim excisum cavitatis, ceu sinuli, qui nisi potius distrahendo fiat, in ipso, ut ita dicam, parenchymate vestigium videatur. Quandoque per tubum aëre quodam modo distendi poterat corpus luteum, compressum, liquorem limpidum, mox magis crassum, subcinereum, aut leviter croceum extillabat. Nunquam vero cavitatem adeo patentem, & amplam invenimus, quae pisum posset continere, ut asseveravit Malpighius.

Hujusmodi corpus frustulis, & quasi lobulis componi scripserunt, structuram ipsius rembus, ut vocant, succenturiatis comparabant, varicosis propaginibus lutei corporis constatam, quasi adipis minima frustula. Dum haec scribo plusquam triginta corpora glandulosa alia recentia, alia macerata, alia in frustula excisa, ob oculos habeo, atque ut potius dydymo comparem analogiae cujusdam ratione adducor; diviso itaque per axim verticalem, aut transversim corpore luteo conicas mamillas, strias, seu appendices utraque facie planas video, quae ex tota circumferentia obtusa cuspidi in communem longitudinalem caveam vergant; Hujusmodi mamillae ex vasculis tenuissimis, mollissimisque sunt, quae crispata ad invicem per longitudinem cumulantur

lantur in ipsius mamillae fabricam; quando vero per corporis lutei longitudinem membranofus ductus protenditur, ille, inquam, expansionibus suis lateralibus mamillas eas firmat, & devincit, ut fila ea, quae a tunica testium albuginea, eorum compagem pervadunt, & fasciculos vasorum seminariarum sustinent, & uniunt; microscopio examinata tenuissima longitudinalia harumce mamillarum fragmenta eandem, ac ea, quae testium sunt, fabricam quodammodo exhibent, crispata nempe sunt, cava, turgentia, & liquido farcta: injiciens per arteriam spermaticam tenuissimam gummi solutionem in alcohol, seu vernicem, hujusmodi mamillas pervadisse non semel, etsi multa cum difficultate vidimus, atque vasculorum, quae sanguineorum propagines essent, elegantissimae myriades observabantur; hinc ex iis ipsis spermaticis vasculis corpus luteum educi suspicabar, quamquam, si ingenue fatear, usque in ipsa lutea vascula injectionis materiam nunquam penetrasse viderim.

Nonnulli Anatomici in nuper foecundatis phlogosi correpta observaverunt ovaria, eorumque vesiculas. Quid si jam pridem factum fuerit? Non equidem per eam temporis brevitatem excitari adeo facile credimus, tum propterea quod ipse uterus non leviter immutetur. In junioribus ovaria intus intertexta videntur confertissimis vasculorum, ita dicam, manipulis, quae in puellis, quibus mammae sorroriari, & caetera pubertatis signa sobolescere incipiunt admodum rubent, & veluti florescunt; nonnullae ipsorum tenuissimae propagines circa vesiculas producuntur; verum e profundo ovarii villi nonnulli lutei germinare videntur, qui graminis adinstar, ut Malpighiana phrasi loquar, vesiculis iis circumducuntur, nec quidpiam referunt, quod cum luteo corpore comparari possit, hinc vero mira celeritate in papillas, seu penicillos luteorum vasculorum cumulantur, quae veluti papulam effingant, atque illinc vesicula minus apparet, flosculos diceres florescentes, glomerantur, cumu-

lan-

lanturque sensim magis, magisque, atque soliditate non minus, quam amplitudine crescunt.

Vidimus interdum ab aliquo corpore luteo, alteram veluti appendicem, seu apophysim pullulare; non erat alterius corporis nimium producta papilla, ut primum suspicatus eram, at quidem connatum corpus ejusdem structurae, hinc mecum ipse meditabar ex iis, quae primum spectaveram, & ex aliis an vesiculae in hanc massam evaderent, extus, aut intus succrescente luteo tomento, aut recens sine his germinaret. Plenitudo ipsorum, defectus residui folliculi, me in hanc potius trahebant sententiam, tum praesente pleno; perfectoque corpore luteo, alia eorumdem rudimenta vidisse visus sum, quae non ita circum vesiculam, veluti penicilli pulposi imagine germinarent, nec alium germinationis modum referrent, ac flos, aut gemma in plantis. *Ante conceptionem*, inquit Cl. Hallerus *plerumque nascitur, sensim circa vesiculam aliquam ovarii coagulum flavum, saepe a me visum, quod valde auctum, circum natum membranae vesiculae, abire videtur in hemisphericum, acinosum, luteum corpus intus cavum, & in ea cavitate, quantum videtur, continens ovulum, sive membranulam minimam cavam, sedem futuri hominis*. Prim. Lin. Physiol. edit. 2. pag. 545. §. DCCCXXV. Eae Halleri observationes nostras non solum comprobant, imo etiam antecesserunt, neque eas renovare ausus essem, nisi idem Clarissimus Auctor in eodem paragrapho, imo in eadem linea adjunxisset, *quod ea corpora in foemina post conceptum primum adparent*, quam sententiam iterum, atque praecise transcripsit ad finem §. DCCCLVII., quae tamen postrema verba deficiebant in eodem paragrapho primae editionis.

Corpora igitur glandulosa non semper eandem plenitudinem assequuntur, incrementi vero rationem quamdam tenent; duo aequae perfecta in eodem ovario, aut unum in utroque nunquam invenisse diximus. Incidimus foeminae

cada-

cadaver, quae gemellos enixa erat, solitarium globosum, terminatum comperiebamus. Hae molliem suam assequuta turgent, & duriuscula sunt, altera molliora flacidiora; illa intense crocea, vel etiam rubent, atque in his vasculorum ordo nitidior apparet, vasculorum, seu intestinulorum inquam, quae corporis lutei compagem faciunt, altera sublutea, pallida subcinerea, pulpam, cujus structuram non tam facile distinguimus, perhibent. Caeterum per gestationis tempora magis, vel minus celeriter decrescunt, donec in exiguissimam molem evadant, ceu in granula, vel maculas minimas, quae quidem & in provectis mulieribus, quae jam a multis annis utero nihil gestarunt, intense luteae, quandoque apparent; papulae, quas superius memoravimus, praecipue occurrebant, quando praesentis gestationis decreveret, vel praeterita gestatione longe magis decrevissent. Veniamus jam vero ad uterum.

Ipse quoque uterus ad conceptionem praeparatur: ex veteribus Anatomicis Carolus Stephanus uteri vasa sanguinea describens, haec eadem in papillas, quae Hipocrates *acetabula* nominabat, elongari scripserat, eaque percipi posse, *non solum in praegnantibus, sed etiam in iis, quarum uterus ad suscipiendum semen aptus est*; confirmaverat Harveus, quam rem non modo neglexerunt Anatomici, imo etiam despexerunt. Ego vero jam ab anno MDCCXLVIII. cornua uteri vaccini, tuberculis hic, illic turgentia quandoque videram, quod idem cum saepius, iterumque vidissem, multa enim mihi ipsorum erat copia, non adeo facile morbi genus, quae mihi primum suspicio obvenerat, esse credebam, nam neque durities, neque sordes, aut ulcera morbi suspicionem dabant; cogitavi postea, an acetabula essent, quae per puerperium decreverent, nam compressa humorem tenuem quidem, atque dilutum, at vero quodammodo lacteum interdum dabant.

Natus

Nactus ergo multam copiam uterorum pecudum, atque vaccarum, quae marem quidem erant passae, at nunquam evaserant foecundae, subductae porro jam fuerant a mare ab hebdomada, vel etiam mense; in iisdem ea quoque tubercula observare contigit, quorum nonnullis, quae majora essent, delectis post macerationem aliquot dierum in aqua, ejusdem esse structurae, ac corpora glandulosa utero gerentium comperi, idem observavi in cuniculis, quas ipse domi servaveram: papulas primum spongiosas, quando minima sunt, referre videntur, quae quidem papulae novam excitatam fabricam demonstrant, si cum reliqua uteri interna superficie comparentur, rubent, atque in aqua diu maceratae, tubercula videntur spongiosa elegantissimo reticulo tecta, e cujus areolis villi quidam, seu villosa lanugo emergit; reticulum illud cum interna uteri membrana continuari conspiciamus; villi e profundo emergunt, neque eadem structura continuatur in reliquis uteri areis (de quadrupedibus loquimur), e quibus nulla eminent acetabula. Hujusmodi reticulum in acetabulis pecudum, quae adinstar calicis sunt excavata, non ad oram, sed non nihil profunde observatur; in vaccis vero in foraminulis spongiosae substantiae intro-mittitur, atque nisi distrahendo, rumpendoque adesse noscimus.

Bestiae quadrupedes, quae menstrua non patiuntur, si libidine aestuent, sanguinem e vagina extillant, atque catula aestu libidinoso furens, neque dum a mare compressa sanguinem sat copiosum emittebat; itemque in ejus utero per varia cornuum loca septem distinctissima, variaeque amplitudinis corpuscula inde repereram, quae acetabulorum rudimenta viderentur, mollia erant, spongiosa, rubella, e quibus tamen serum potius lactescens pressione exprimebatur; vasa ad ea corrivabant sanguine turgida, in iisque confunde-bantur.

In mulieribus, priusquam concoeperint, nihil profecto huiusmodi observavisse ingenuus fateor; Clariss. Morgagnius sinus demonstravit, e quibus sanguis menstruus extillaret; eos ampliores utpote sanguine turgidos, instantibus catameniiis, semper comperimus, atque compresso utero potius per oblongos hiatus, quam per vasculorum foramina sanguinem extillare observavimus; rubet, turget uterus ob aestum venereum, nihil ultra immutatum ante conceptum revera vidimus. Porro tamen propria vi mutari ex eo deducimus, quod cum non semel mulieres aperiremus, quae primis graviditatis hebdomadibus obierant, etsi ovum utero nullibi adhuc dum adhaereret, nihilo tamen minus, alicubi magis turgere uterum, & sinus magis patulos, longius productis tumidis labris, observabamus, ceu veluti designatum locum, ubi placenta tandem infigi, & adhaerere deberet. Idem observavimus in utero vacuo cum conceptus esset in tuba sinistra, ut, inquam, propria vi immutari uterum dicamus, ceu non ex solo placentae contactu. Erat in eo loco pusillus foetus, turgebat tuba crassis parietibus, atque vasis summe turgidis circumdabatur; uterus porro triplo erat naturali major, rubellus, turgidus, atque ad eum locum, ubi tuba illius lateris insinuabatur, per tres digitos transversos magis erat tumidus, atque in superficie interna sinus satis patulos habebat productis labellis crassis, atque non nihil tumidis. Longe tumidae erant arteriae spermaticae, atque instituta injectione, ceram plenis rivulis in uteri tumidi sinus penetrasse observavimus, quum eae arteriae, quando mulieres nihil in utero habent, ad eum tota naturali diametro perveniant, angustentur inde, ut tenuissimae in uteri substantia intercipientur. Quid porro? foeminae nonnisi post purificationem concipiunt, atque si cesser, non amplius foecundae evadunt; mulieres ultra quinquagesimum annum menstruantem pepererunt, praecoces huiusmodi purificationes in puellis praecoces reddunt foecundationes.

Har-

Harveus mucosa filamenta describit, quae ab ultimo, seu superiore cornuum angulo ducta, simulque inde juncta, membranosa, ac mucilaginosa tunicam, seu, ut ajunt manticam, vacuam vero, cœu nullo occupatam embryone efficerent. Equidem embryonis membranas tamquam ex muco compaginari amplissimis Anatomicorum observationibus ediximus. Semel in scropha, in qua luculenta occurrebant uteri acetabula, mucosam, sanguinolentam telam observaveram, per totam uteri amplitudinem perfusam, nec ullam minimam compactam substantiam, quae pro embryone, vel minimo sumi posset, occludentem; in aqua neque solvebatur, & adinstar membranae natabat, & expandebatur facillime citra rupturam, crassam, mucosam, spongiosamque telam dixisses, quae passim rubebat papulis, seu maculis sanguineis. Etsi per quam attentum in hujus uteri anatome me praestiterim, non potius Harvei observationem confirmare intendo, quam Anatomicorum diligentiam excitare, ut in iisdem insistant; Harveus enim tanta observandi opportunitate, atque diligentia observationes suas adauxit, ut hae negligi quidem non debeant; atque ut ipse fatear quod recogito, postremae, quas in ovibus, & vaccis institui observationes, a communi sententia me non leviter deturbarunt, ut generationem multiplici patium apparatu promoveri, foveri, & perfici crediderim; dubium observationes excitarant; eadem aliquando fortasse absolverent, si porro operis modos sequamur.

Equidem placenta, quam partem organicam tandem conspiciamus veluti ex muco fit. Primis gestationis temporibus ab utero delapsum ovum mucosa substantia sanguinolenta circumquaque obvolutum videtur: hujusmodi placentam Ruyschius sanguinem praeter naturam concretum existimaverat; at vero si aqua dissolvatur, fibrosam permixtam texturam observamus; quam Clariss. Albinus nitide resolvit; quo magis placentae organica structura adolescit, eo

solidior videtur, mucosa, villosa sit substantia, elegantissimum muscum refert, vascula fiunt sensim majora, solidiora, e quibus funiculus tandem umbilicalis educitur. Perpendite quemadmodum habitis proportionibus adaucta placenta soliditate, amplitudo decreseat, pulposam tamen semper retinet mollitiem, vel solubilem saltem, atque spongiosam, reliqua membranarum pars, super quam non adcrevit placenta, mollis cellulosa, mucosa, glutinosa inquam superest ex ea facie. Modo huic, modo illi ovi plagae (desuper ipsum uteri orificium offendimus) in mulieribus adhaeret, dum tamen foetus in membranis eundem semper situm tenet, ne dicamus ex ovi inclinatione fieri; funiculus umbilicalis non semper ab eadem placentaе plaga prodit, quod ista vegetationis inquam modum non semper eundem tenet, aptatur autem aptae uteri plagae, etenim in bestiis, quae discreta habent, & uteri cornubus propria acetabula, cotyledones omnino respondentes numero habent, situ, atque figura; excessum, aut defectum ullum numquam observasse contigit; longe tamen diversa est cotyledonum, & acetabulorum structura, quemadmodum & partium, quibus adnascuntur, ut causa, quae alteros efficit, non eodem pacto altera componat, etsi successive fiant; est tamen utrorumque structura elegantissima, adeoque inquam diversa, ut per contactum fieri, nequidem suspicari possimus, itidemque longe variant inter se, ex variis animalium speciebus, & in eisdem animantibus harum partium numerus, & figura multum variat, etsi semper sibi ad invicem respondeant; placenta inquam ipsa humana non per totam superficiem suam aequae adolescit, per cumulos distinctos pleniore, ampliores, vividioresque compaginatur, & in cotyledones aequae resolvitur.

SUITE DES RECHERCHES

*Sur le fluide Élastique de la Poudre
à Canon.*

PAR LE CHEVALIER SALUCE.

1. JE crois d'avoir assez prouvé dans le Mémoire précédent, que le fluide élastique qui se développe de la poudre à Canon est de même nature que l'air commun, & que la force prodigieuse de ce fluide dépend de l'action du feu dans toutes ses parties qui lui fait recouvrer sa force élastique. Comme cependant cette matière est une de plus intéressantes dans la Physique, je tâcherai de perfectionner de plus en plus le travail que j'avais entrepris, en y ajoutant des nouvelles lumières qui serviront non seulement à confirmer la Théorie que j'ai établi, mais encore à lui donner une plus grande étendue.

Je vais donc exposer les principaux résultats de mes recherches. Les expériences sur l'élasticité, & sur la compression du fluide, que je n'avais qu'imparfaitement tenté comme je l'ai dit (a) & que j'ai tâché de répéter soigneusement, serviront avec l'analyse de quelques autres faits à mettre hors de doute ce que j'ai déjà avancé; je passerai ensuite à faire voir que la force du fluide dépend principalement de la vitesse avec laquelle il se développe: les expériences qui suivent remplissent la première de ces vues.

2. Je formai le tube de communication entre le flacon où je mettais la poudre, & le récipient, de cinq cylindres de verre assez longs; celui qui tenait au flacon l'était même d'avantage, afin que le fluide pût se dilater dans un

P 2

plus

(a) Voyez la note * du mém. pag. 6.

plus grand espace sans trouver le moindre obstacle (b); je les garnis chacun d'un double filtre de gaze bien serrée, & j'en enduisis les quatre premiers de bonne huile de tartre: je passai dans les tubes aussi du coton trempé dans la même huile, & je mis du sel de tartre pilé grossièrement sur le filtre de la pièce qui entraînait dans le récipient; le baromètre recourbé finissait en forme d'entonnoir vers la partie qui communiquait avec l'air extérieur, & l'autre extrémité entraînait dans un petit cylindre qui tenait à un robinet, lequel passait dans le récipient en traversant la platine de la machine pneumatique. Toutes les jonctions furent soigneusement mastiquées, & j'opérai ensuite de la même manière que dans l'expérience (3. du mém.) : le mercure était presque à la hauteur de 27 pouces lorsque la poudre prit feu, en sorte qu'il ne serait resté dans ces cavités qu' $\frac{1}{2}$ pouce d'air environ, il baissa au premier instant de dix à douze pouces, & après quelques oscillations qui diminuaient par degrés le mercure commença à monter, & ne discontinua qu'après quelque tems; s'étant arrêté à un, ou à deux pouces plus bas qu'il n'était au moment que la poudre s'enflamma; je reconnus alors que le fluide avait acquis la température de l'air ambiant, & je notai le point d'élévation à l'accoutumée.

3. Je plaçai ensuite ce baromètre d'épreuve à côté d'un autre exactement construit suivant la méthode donnée (com. pag. 16.) afin de pouvoir comparer les changemens, & estimer la cause des altérations qui pouvaient survenir; je le gardai ainsi durant vingt-trois jours sans qu'il m'ait été possible de découvrir que ce baromètre eut souffert d'autres change-

(b) Il m'est toujours arrivé de voir briser mes vauzeaux lorsque le tube étant trop court, le filtre se trouvait près du flacon, ou lorsque étant dans l'obligation de plier le tube, la courbure n'était pas assez éloignée du flacon. Mr. Hailes dans son Appendice à la stat. des végét. nous apprend qu'il prit aussi cette précaution. pag. 341.

changemens que ceux qui dépendaient des variations de l'atmosphère : je crus enfin inutile de le garder plus long tems puisque je n'avais pas la moindre indication d'absorption, d' autant plus que Mr. Hauksbee nous apprend, comme je l'ai déjà dit, que les $\frac{19}{20}$ dont il fait mention furent

absorbés dans 18 jours sans avoir subit ensuite aucune variation. Le vingt-quatrième jour pour déterminer les lois de la compressibilité de ce fluide j'ai versé à plusieurs reprises dans la jambe ouverte différentes quantités de vis argent, & ayant observé les diminutions de l'espace je trouvai que le degré de compression était précisément en raison des poids ajoutés (c).

4. La conclusion que j'ai tiré de mes expériences est sans contredit très-simple, & naturelle ; & on doit acquiescer d' autant plus volontiers que tous les résultats concourent à la démontrer. Je suis pourtant d'avis que quoique l'air soit le grand agent qui produit les effets de la poudre, il exerce cependant dans cette rencontre au premier instant une force plus expansive que s'il était parfaitement sec : car l'on fait qu'un air humide peut se dilater d'avantage, & qu'il se trouve en effet de l'humidité dans le salpêtre, ainsi que dans tous les sels cristallisés ; il est pourtant clair, par ce que nous avons vu, que l'humidité n'a pas grande part dans les effets de la poudre, & ceci sera encore plus clairement prouvé dans la suite. Au reste quelque soit l'effet que peut produire l'humidité qui se développe d'une poudre donnée on ne saurait la déterminer précisément sans en connaître exactement la quantité : on pourrait peut-être l'obtenir en brûlant cette poudre dans un flacon, qui fut
ma-

(c) Je crois de devoir avertir ici que les colonnes de mercure que j'ai ajoutées dans le tube s'écoulaient se trouvaient contenues dans l'espace cylindrique, de sorte que l'entonnoir que j'avais appliqué pour avoir une quantité suffisante de mercure, lorsque je faisais le vuide dans la jambe opposée, ne me servait en cette occasion que pour me faciliter les opérations.

maîtrisé à une file de balons ; on aurait alors cette quantité en entier par sa condensation. Je ne crois pas d'ailleurs qu'il y eût une méthode plus sûre pour dénouer cette question ; car outre qu'il est fort difficile de savoir parfaitement combien chaque composant contient d'eau, quand même on en serait assuré, il serait encore question de déterminer combien en retiennent les sels neutres, que l'on trouve après l'inflammation ; ce n'est pas un point à négliger, puisqu'on sait que les sels qui se cristallisent en contiennent une quantité considérable ; l'umidité donc qui se trouve dans les composans, ou dans la poudre même étant connue, on ne serait nullement illuminé sur l'accroissement de la force expansive qu'elle apporte à l'air.

5. Du reste si l'eau que contient la poudre se développait en vapeurs dans le tems de l'inflammation, il est visible que non seulement elle produirait toute seule les effets de la poudre, mais encore des bien plus grands, puisque Mr. Muschembroek a trouvé que l'eau qui se résout en vapeurs a alors pour le moins une force onze fois plus grande qu'une égale quantité de (d) poudre ; une onzième donc, c'est à dire une quantité bien petite de l'eau qui se trouve en effet dans la poudre, suffirait pour produire tous ses effets, de façon que l'air n'y entrerait plus pour rien, ce qui est absolument contraire à ce que j'ai fait voir & qui se trouve encore confirmé par l'autorité de plusieurs Auteurs du premier ordre.

6. Un Physicien renommé de notre tems prétend que l'air n'est pas suffisant à produire tous les effets de la poudre je rapporterai ici ses propres termes. *La (e) plupart des Physiciens qui ont parlé de l'explosion de la poudre ont attribué ce merveilleux effet uniquement à l'air qui s'y trouve comme incorporé par l'action des pilons, & à celui*

(d) Essai de phys. §. 873.
(e) Leçons de phys. expérim.

celui qui remplit les petits espaces, que les grains rassemblés comprennent entr'eux Ces raisonnemens doivent sans doute entrer dans l'explication des effets de la poudre enflammée, & je n'ai garde de les contester : mais je ne les crois pas suffisans, & je pense qu'il faut y en ajouter quelque autre &c. Je renterai de développer les raisons, qu'il apporte en les comparant aux autorités sur lesquelles il les appuie. Quant aux vapeurs qu'il associe à l'air auxquelles il attribue la vertu d'avoir contribué à faire baisser l'eau dans le tube de Mr. Bernoulli comme on peut le voir par ses propres expressions. *N'est-on pas tenté de croire, que dans le tuyau de Mr. Bernoulli il reste après l'inflammation quelque vapeur qui augmente un peu le volume de l'air avec lequel il se mêle, & qui fait baisser la surface de l'eau ?* quelles qu'elles soient, il suffit d'observer que ce grand Géomètre n'ayant déterminé cet abaissement que quatre heures après le refroidissement du fluide (f) on ne peut plus emprunter le secours d'aucune espèce de vapeur pour rendre raison du fait ; car il ne nous est pas encore donné de en connaître d'aucune sorte qui n'acquière dans

(f) Mr. Bernoulli nous apprend qu'ayant mis le feu dans un tube au moyen d'un miroir ardent, à quatre grains de poudre, l'air qui s'en développa chassa l'eau hors du tuyau, après quoi elle remonta jusqu'à ce que le fluide eut acquis la température de l'air ambiant, & s'arrêta ensuite trois ou quatre heures après ; il mesura alors l'espace occupé par le fluide, & il le trouva capable de contenir 100 de ces grains, ce fait, & quelque réflexions qu'il y ajoute, lui font déterminer l'air contenu dans la poudre cent fois plus dense qu'il est dans son état naturel.

On peut remarquer en premier lieu qu'il fait sentir, qu'à l'occasion de l'explosion l'eau fut poussée avec tant de violence que si le tube n'avait pas été bien long, non seulement l'eau, mais l'air même en aurait été entièrement chassé. *Adeo ut nonnunquam, nisi portio tubi sit satis longa, per orificium, non solum omnis aqua, sed aer expelli possit.* On peut noter eu second lieu que Mr. Bernoulli n'a donné que l'espace absolu de quatre heures après que l'eau s'était arrêtée, ou comme il dit, après le refroidissement du fluide, & qu'il ne tient aucun compte de l'absorption des vapeurs sulfureuses pendant ce tems. *Proinde res ex voto successit ; ideoque machinam immutatam, in priorem locum temperaturæ translulus,*

dans un aussi long espace de tems sa condensation naturelle, lorsque la cause qui avait produit sa dilatation a entièrement cessé.

7. Quoique cet Illustre Auteur ait cherché par là de donner une explication du résultat que Mr. Bernoulli rapporte dans sa dissertation *De effervescencia, & fermentatione*, insérée dans le pr. Volume de ses oeuvres à la pag. 35., on voit cependant qu'il a quelque doute sur cette expérience comme ses paroles semblent l'indiquer. *Je sais bien dit-il que Mr. Bernoulli cite par Varignon ayant mis le feu &c. (g) & je conviens que cette induction s'il n'y a rien à rabattre donne beaucoup de force à l'opinion de ceux qui attribuent à l'air seul les grands effets de la poudre. Mais comment accorder cette expérience avec celles de Mr. Halles, d'ou il conclut avec toutes les apparences de vérité, que les matières sulfureuses que l'on brûle absorbent l'air. Il est pourtant sûr que l'espace des deuxcent grains n'est pas exagéré, & qu'il est au contraire fort au dessous de ce qu'il aurait été sans l'absorption des vapeurs sulfureuses, mais l'on voit assés que ce n'est qu'en conséquence de la persuasion ou il était par sa Théorie a priori, que l'air ne suffit pas &c. qu'il a avancé, que dans le tuyau de Mr. Bernoulli il restait après l'inflammation quelque vapeur qui augmentait le volume de l'air &c. & qu'il trouve de la difficulté à accorder cette expérience* avec celles des Mr. Halles, il me paraît cependant qu'elle ne porte pas coup à celles ci, à moins que l'on ne craie que*
Mr.

stulimus, ubi aquam in tubo sensim rursus ascendere observavimus, nimirum ob duplicem causam, tum ob translationem ex loco calidiori in frigidorem, tum ob subito incensum ignem iterum extinctum, tandiu, inquam, ascendit aqua, donec tota machina refrigerasset, & pristinum statum, induisset; tum demum amplius non ascendit, sed quievit, exigam per tres, vel quatuor horas, quamdiu in isto statu permittebamus; sic itaque advertimus, non ad priorem terminum usque ascendisse, sed notabiliter infra limitem posuisse, sed prout judicavimus ducenta granula pulveris pyri vix adimplevissent spatium.

(g) Voici la note ci devant.

Mr. Halles n'ait voulu démontrer que les vapeurs sulfureuses ont la propriété de fixer, ou d'absorber dans ce peu de tems presque tout l'air d'un tube quelconque, ce qui ne serait pas l'intention de ce célèbre Anglais (& c'est ce dont je n'oserais soupçonner le savant Auteur dont je parle). Car dans la Statique des végétaux il fait voir que l'air est absorbé par ces sortes de vapeurs (*h*): qu'il ne l'est que fort lentement, de sorte qu'elles ont cette vertu pendant plusieurs jours (*i*): que dans les premiers tems elles ont plus d'action que dans la suite, comme le remarque Mr. Hauksbée (*k*): qu'elles ne peuvent enfin absorber tout l'air contenu dans l'espace ou elles sont renfermées (*l*); il parle ensuite de la grande quantité d'air qui sort du salpêtre, & en conséquence il ne doute point que le fluide élastique

(*h*) Exp. 76. pag. 173.

(*i*) Ibid.

(*k*) Mr. Hauksbee ayant brûlé de la poudre dont le poid était d'un grain dans un tuiuu, où il avait observé par l'abaissement de l'eau que la quantité du fluide généré occupait au premier instant 222 fois le premier volume, il remarqua que dans deux heures de là, l'eau était remontée de $\frac{4}{20}$ de l'espace abandonné,

& que deux heures encore après elle était $\frac{5}{20}$ de plus au dessus. Hors il est évident que cette ascension de l'eau ne peut pas seulement dépendre du refroidissement du fluide, & de la condensation des vapeurs aqueuses comme paraît le soupçonner l'Auteur de cette expérience: car comment pourrait-on penser qu'un peu de ce fluide si rare ait pu retarder non seulement quelques heures, mais bien des journées avant que d'avoir acquis la température de l'atmosphère, puisque l'eau continua à monter pendant dix-huit jours, & qu'il n'y resta plus qu' $\frac{3}{20}$ après ce tems qui n'ai plus changé? Les expériences de Mr. Halles, & celles que j'ai fait moi même font voir qu'une aussi longue absorption n'est due qu'aux vapeurs acides & sulfureuses, & puisqu'on peut croire sans hazarder que dans une heure de tems, l'action de la chaleur, & des vapeurs aqueuses ait entièrement cessé, il faut convenir que la diminution du fluide dans ce tems apportée par trois différentes causes, c'est à dire par la condensation des vapeurs, par celle de l'air, & enfin par l'absorption n'égalant que $\frac{3}{20}$, ou soit $\frac{3}{20}$ du fluide généré, le vapeurs aqueuses sur tout n'ayent pas cette grande vertu qu'on leur attribue.

(*l*) Pag. 202.

sique de la poudre ne soit de l'air commun (*m*) : cet air cependant doit être considérablement condensé , puisque le même Mr. Halles par la distillation qu' il a fait du salpêtre a trouvé que l'air qui en est généré occupait un volume cent quatre vingt-fois le premier (*n*) .

8. On peut aussi examiner à cette occasion le sentiment d'un Physicien qui dans le quatrième tome de l'Accadémie de Bologne a donné une dissertation sur ce sujet ; cet Auteur , dont le travail montre d'ailleurs assés d'érudition, entreprend de faire voir par un enchainement d'argumens, qu'il faut avoir recours aux vapeurs aqueuses pour obtenir l'immense raréfaction du fluide , & il prétend que l'air n'est pas suffisant , comme on peut le voir par le précis de son sentiment que je vais exposer . *Mr. Bernoulli* dit-il nous apprend que l'espace abandonné par l'eau aurait pu contenir deux cent des grains qu'il avoit employés , donc en divisant par 4 qui étoit le nombre des grains dont il se servit , l'on aura la densité de l'air en raison de 50 par grain , or en supposant une chaleur égale à celle de l'huile bouillante , le volume du fluide rarefié , sera 250 fois plus grand que celui de la poudre ; mais *Mr. Ammontons*, *Belidor*, & moi même , continue-t-il , nous avons trouvé que la flamme de la poudre se dilate dans un espace 4 ou 5000 fois plus grand que l'espace de la poudre , donc , pour que l'air pût se dilater dans un aussi grand espace , il faudrait que le degré de chaleur nécessaire fût à celui de l'huile bouillante comme 16 : 1 ce qui n'étant pas probable , il faut donc avoir recours à l'eau qui est dans le salpêtre , & qui se convertit en vapeurs en même tems que la poudre s'enflamme .

9. En premier lieu je ne saurais penser que la force , ou l'activité de la poudre dépende du volume de la flamme , ni qu'on puisse la mesurer par là , étant très-naturel que dans un fluide composé de parties inflammables , & de parties

(*m*) Pag. 237.

(*n*) Exp. 72. pag. 159.

parties actives, ces dernières ne se dilatent pas dans un volume aussi grand que la flamme qui émane des autres : en effet il est évident que la force du fluide doit être déterminée par l'espace qu'il occupe dans son expansion, en vertu de laquelle il chasse les obstacles qui se présentent, & non pas par le volume qu'acquiert la flamme dans cet instant, puisqu'il est certain que la première dépend entièrement des parties actives du fluide, sans que l'on puisse porter le même jugement par rapport à l'autre.

10. Notre Auteur n'a pas non plus observé que dans le tube de Mr. Bernoulli il faut avoir égard à l'air qui est absorbé par les vapeurs sulfureuses ; or en supposant même que ce soit le refroidissement de l'air humide, qui ait seul contribué dans la première heure à l'ascension de l'eau dans le tube, & que ces vapeurs sulfureuses n'y entrent pour rien, de façon que sans cela le fluide ne se serait dilaté que dans $\frac{18}{20}$; l'on ne pourra cependant pas se dispenser de leur attribuer les changemens arrivés dans les trois heures suivantes : or ces changemens, comme je l'ai ci devant observé (not. k) montent à 7 autres vingtièmes de l'espace résidu, de sorte que dans le tube il ne pouvait plus rester alors que $\frac{11}{20}$ de l'air généré (ibid.), & comme cet air qui restait, était égal à cinquante fois le volume de la poudre, donc trois heures auparavant le volume du fluide généré devait être pour le moins 81 fois plus grand que le volume de la poudre.

11. Ce résultat cependant ne saurait convenir avec celui que Mr. Hauksbee nous donne, quand même nous tiendrions encore compte de la première heure*, car nous n'aurions qu'un volume 90 fois plus grand, tandis que le susdit Auteur le trouve de 122, mais on voit assez que Mr. Bernoulli n'a pas prétendu donner une mesure exa-

ste. du fluide, mais seulement une ingénieuse manière de le déterminer; car par ce que nous avons vu ci-devant (not. f) il a crû que l'ascension de l'eau avait été causée par le transport de la machine d'un endroit à un autre qui était moins chaud, & par la prompte extinction du feu; c'est pourquoi il fait observer que l'eau ne cessa de monter que lorsque le fluide eut acquis la température de l'atmosphère sans pourtant nous faire savoir le tems que ce fluide employé à se refroidir, il nous dit seulement avoir observé la hauteur de l'eau trois ou quatre heures après qu'elle fut tranquille; mais c'est là une détermination bien vague, parceque l'on fait que l'eau dans l'expérience de Mr. Hauksbee continua encore à monter pendant 18 jours compris le tems de son refroidissement: & cela eu égard à l'absorption de l'air causée par les vapeurs sulfureuses, de sorte que l'on ne peut pas savoir le tems qui s'écoula depuis l'inflammation jusqu'à celui où Mr. Bernoulli fit son observation, ni par conséquent faire entrer en compte l'absorption qui se fit dans ce tems là.

12. Pour en revenir à l'Auteur ci devant cité (8): il détermine la densité absolue de l'air dans chaque grain de poudre par rapport à celle de l'air commun comme 50 : 1. parceque l'expansion du fluide dans le tube de Mr. Bernoulli était au tems de l'observation dans la même raison à l'égard du volume de la poudre; outre les reflexions que j'ai fait, par lesquelles on peut facilement appercevoir l'inconséquence de ce raisonnement, il faudrait supposer encore que tout le volume de la poudre consista dans un égal volume d'air pur condensé, qui cependant comme nous l'apprend Mr. Halles n'y entre que pour la huitième partie, le reste étant de parties inflammables, & grossières (o):
de

(o) Mr. Halles à la vérité ne dit cela qu'en parlant du saipêtre, cap. 72. pag. 159. mais comme l'air de la poudre n'est produit que par la décomposition de cette substance, & que les deux autres n'en fournissent point, ou du moins

de plus l'on doit prendre en considération les intervalles qui sont entre les grains, & dont la somme en rend le volume absolu moindre d'un tiers.

13. Ensuite de toutes ces raisons, & de celles (11) qui me font préférer l'expérience de Mr. Hauksbee, ne s'agissant point d'ailleurs d'introduire ipotétiquement l'action d'une chaleur sujete jusqu'à présent à plusieurs déterminations arbitraires, je remarque en premier lieu que l'air généré à l'occasion de l'inflammation occupait un espace 222 fois plus grand que le volume de la poudre; or en retranchant la $\frac{1}{10}$ de l'espace qui avait été remplacé par l'eau dans la première heure, pour être assurés que la chaleur de l'air n'y a plus aucune part, nous aurons le volume du fluide réduit à la température de l'air ambient environ 100 fois plus grand que celui de la poudre: en second lieu comme ce volume est moindre d'un tiers (12), celui du fluide sera par conséquent au moins 266 fois plus grand, & puisque l'air ne faisait que une huitième partie de la poudre (12), donc le volume du fluide était pour le moins 2128 fois plus grand que celui qu'il occupait dans la poudre avant l'inflammation, d'où il en vient enfin que l'air dans chaque grain, ou pour mieux dire dans la poudre employée, avait cette densité; ce qui est fort éloigné de ce que prétend l'Auteur dont j'ai rapporté le sentiment (8).

14. D'après tout ce que je viens de dire on peut voir clairement que les Théories purement speculatives, & établies
a priori

moins si peu qu'on ne s'en apperçoit pas assés sensiblement, j'ai crû de pouvoir me servir de cette lumière par rapport à la poudre, & cela d'autant plus que le salpêtre ne faisant que les $\frac{1}{3}$ de la meilleure poudre on n'aurait à ce prix que la $\frac{1}{3}$ des $\frac{7}{3}$ &c.

a priori sur de principes éloignés sans le secours d'un enchainement d'expériences qui en appuient le système, sont fort sujettes à caution, & c'est là un avertissement que nous donnent les Physiciens du premier ordre, & que j'ai tâché de suivre autant qu'il m'a été possible : *en fait de Physique*, dit Mr. de Buffon, *on doit rechercher autant les expériences, que l'on doit craindre les systèmes, & la connoissance des effets*, dit-il, *nous conduira insensiblement à celle des causes, & l'on ne tombera plus dans les absurdités, qui semblent les caractériser* : il est vrai qu'il n'en faut pas non plus abuser, & pour cela il avertit que l'on doit *en amasser jusqu'à ce que nous soyons instruits*.

15. Mr. Daniel Bernoulli apporte encore une difficulté qui est sans doute plus réelle, & qui paraît même insurmontable au premier aspect. Voici en quoi elle consiste.

Ce savant Géomètre ayant calculé par les gravités spécifiques connues, de l'air, & de la poudre, la quantité d'air qui pouvait y être contenu, a trouvé que quand même on voudrait la supposer toute d'air, l'élasticité de celui-ci ne serait jamais capable de produire la force que nous y observons. D'où il conclut qu'il faut, ou admettre dans la poudre un autre principe plus actif, que l'air, ou bien supposer que sa force élastique augmente en ce cas dans une raison plus grande que celle des condensations.

16. L'on pourrait à la vérité éluder entièrement cette difficulté en accordant à Mr. Bernoulli cette dernière hypothèse, l'expérience nous apprend en effet que lorsque la densité de l'air est seulement quadruple de la naturelle, la condensation augmente en moindre raison que les poids comprimans ; d'où l'on a tout lieu de croire, que cette raison ira toujours en diminuant de plus en plus dans les plus grandes condensations. Mais quoique l'on ne doive pas exclure absolument cette raison, on peut cependant y en ajouter une autre qui n'est pas moins digne de considération

tion c'est-à-dire, que puisque l'air contenu dans la poudre est mêlé avec des substances hétérogènes, il pourrait bien avoir une gravité spécifique plus grande que celles-ci, & par conséquent que la poudre même, & dans ce cas l'excès de condensation pourrait en quelque façon compenser la moindre quantité qu'il y en a, en effet nous avons trouvé *a posteriori* que l'air de la poudre est au moins 2128 fois plus dense que l'air naturel, & au contraire selon le calcul de Mr. Bernoulli il ne pouvait avoir tout au plus, qu'une densité mille fois plus grande.

17. De la réflexion proposée il paraît que l'on peut déduire la véritable raison de cette différence; Mr. Bernoulli a déterminé la densité de l'air de la poudre 1000 fois plus grande que la naturelle, ensuite de ce qu'il a posé la gravité spécifique de la poudre égale à celle de l'eau; nous verrons dans la suite que l'air de la poudre n'est pas contenu indistinctement dans chacun de ses composants, mais qu'il se trouve dans le salpêtre; or la gravité spécifique de ce sel est plus que double de celle de l'eau, & par conséquent la détermination de celle de la poudre assignée par cet Illustre Mathématicien est moindre de plus de la moitié de ce qu'elle est en effet; il n'est pas extraordinaire par conséquent que l'air soit beaucoup plus condensé qu'il ne l'a supposé: La plus grande densité enfin de l'air dans la poudre, & la plus grande raison selon laquelle cet air si fort condensé augmente son élasticité, peuvent fournir une solution de la difficulté proposée par ce Savant.

18. Je ne saurais convenir non plus avec l'Auteur Italien sur ce qu'il avance dans ce même mémoire que dans les opérations de la poudre, on condense de l'air sans s'en apercevoir, car selon cette opinion il s'ensuivrait que les substances étant seulement broyées ensemble ne devraient point produire autant de fluide que si on en grainait une égale quan-

quantité, cependant soit que les matières ne soient que broyées, ou qu'étant grainées on les pile, & on les presse finement, la quantité du fluide ne change pas du moins assés sensiblement pour s'en appercevoir: l'air enfin à mon avis se trouve dans les parties intimes. Quant à ce que ces deux Savans. (6. 8.) nous disent par rapport à l'inflammation de la poudre dans le vuide, je ne crois pas d'être obligé d'en parler plus au long ici, après ce qu'en ont dit de grands Hommes, & ce que j'ai exposé moi même dans le mémoire précédent.

19. Il est inutile de pousser plus loin ces petites discussions, je passerai maintenant à examiner les propriétés, & les fonctions particulières de chacun des composans de la poudre; mais comme l'on ne saurait parvenir, le plus souvent à découvrir la raison, & le rapport des phénomènes, sans combiner les effets produits par des principes qui aient entr'eux quelque analogie, j'ai crû devoir en comparer quelques uns selon les combinaisons qui m'ont paru les plus propres à cet effet.

20. Le salpêtre est un sel moyen, qui a entr'autres propriétés celle de se décomposer par l'attouchement du phlogistique auquel l'acide qui s'en sépare, s'unit intimement, ainsi qu'il est universellement reconnu en Chimie; & je ferai voir dans la suite que c'est en conséquence de cette manœuvre que se produisent les effets de la poudre. Mrs. Boyle, Halles, Muschembroek, & plusieurs autres Physiciens ont reconnu qu'il se développe un fluide élastique du salpêtre, lorsqu'il se décompose, ils ont même tâché d'en déterminer la quantité, & presque tous le tiennent pour de l'air naturel; Mr. Halles entr'autres n'en doute pas, (p) Mr. Boyle pour s'assurer si l'air était nécessaire pour la cristallisation de ce sel essaya de combiner de l'esprit de nitre avec du sel de tartre dans une phiole
vuide

(p) Stat. des végét.

vide d'air (9), & n'ayant point vû ce mélange tomber en cristaux après un certain tems, il conclut de la très-judicieusement que l'air y était nécessaire.

21. On observe à l'occasion de l'effervescence qui se fait par le mélange de ces deux substances, en le pratiquant dans une vafe fermé que le baromètre descend après quoi il remonte, & se rend toujours à niveau, d'où l'on peut conclure que dans les premiers tems il se développe beaucoup d'air, & qu'il se réabsorbe ensuite; de façon que l'on pourrait demander si ce n'est point les parties des matières qui étant dans un violent mouvement pour s'unir réciproquement, excitent une chaleur qui communique à l'air la vertu de se dégager de dedans ces mêmes matières, & si ce n'est point dans le tems que commence l'évaporation qu'il s'introduit de nouveau? il est vrai qu'on pourrait douter que la chaleur qui est produit par le mélange des matières cause la descente du mercure, par la dilatation qu'elle procure à l'air, laquelle cessant l'oblige de remonter.

22. Ce sont deux points trop délicats pour chercher de les décider sans le secours d'une longue suite d'expériences guidées par les raisonnemens les plus éclairés, je me contenterai en attendant de suivre l'opinion commune des Physiciens, & d'en apporter quelque raison plausible me réservant de traiter ces matières plus amplement une autre fois, d'autant plus que je me flatte d'avoir le plaisir de lire ce que l'Auteur dont j'ai exposé le sentiment (8) promet de donner, & de profiter de ses découvertes pour mieux réussir dans mon entreprise.

23. La descente du mercure dans l'eau est très-rapide, la dernière même à cause de sa moindre gravité spécifique en est chassé du Siphon par reprises, après les premiers moments il se fait des oscillations, & enfin le liquide se rend

r

rend

rend à niveau dans les deux jambes , mais comme il se passe un tems considérable avant que le liquide se soit rendu à niveau, il paraît que nous devons plutôt penser que c'est de l'air développé , car il n'est pas probable qu'il fallût autant de tems à l'air du récipient pour se remettre dans son premier état , & qu'il peut se faire que l'absorption de l'air généré soit plus difficile , & dure plus long tems, comme nous en avons des exemples dans celle qui se fait par les vapeurs sulfureuses , & même par la poudre brûlée, laquelle selon ce que nous avons vu d'être pendant plusieurs jours ; (r) enfin dans les expériences qui j' ai fait avec les vases soigneusement mastiqués je n' ai jamais trouvé qu'une partie du mélange réduite en sel (/) , & encore après long tems, ayant ensuite exposé à l' air le reste , qui était encore liquide il s' est aussi transformé en sel , & j' ai toujours trouvé au fond du vase dans lequel j' avais placé celui ou devaient se mêler les substances, une quantité d' humidité qui ne peut-être à mon avis que les vapeurs condensées.

24. Cet air qui sort ainsi , lorsque ces deux liquides sont mêlés ensemble ne doit différer de celui de la poudre à Canon , qu'en ce qu'il ne se trouve point mêlé avec de vapeurs sulfureuses , & par cette même raison si l' extinction du feu ne dépend que de la mauvaise nature de ces sortes d' exhalaisons , la flamme ne devrait rien souffrir , c' est cependant ce qui n' arrive pas , car un flambeau allumé étant introduit dans un vase , ou ces deux liquides ayent été combinés , s' éteint dans le moment , c' est un phénomène des plus singuliers , je m' en suis cependant assuré par plusieurs expériences réitérées.

25. Ce phénomène ne paroît qu' une conséquence de la Théorie que nous avons donné sur l' extinction du feu , & de la flamme dans des lieux clos (com. pag. 22.) ; car l' air

(r) Voi. la not. k.

(/) Je crois que l' on me dispensera de donner le manuel des expériences , & sont trop aisés à être imaginés.

L'air qui est chassé des substances, & celui qui est dans le vase souffrent des altérations causées par la chaleur excitée ensuite de la mixtion de ces liquides, comme s'il passait autour d'un corps échauffé à un égal degré de chaleur, ou plus encore que si on le lui communiquait par un feu extérieur d'égale intensité.

28. Il n'est par conséquent pas extraordinaire que Mr. Muschembroek n'ait pu entretenir la flamme dans les airs *factices*, puisque s'étant servi à peu près de la méthode de Mr. Halles pour se les procurer, leurs procédés dépendent tous de ce principe. Ceci est encore confirmé par l'expérience que j'ai fait dans cette vûe ; je combinai dans un récipient fermé (de la même manière que j'ai fait pour le nitre régénéré) du vinaigre distillé avec de l'esprit de sel ammoniac, (1) quelque tems après l'effervescence, j'introduisis le flambeau allumé, & il ne me fut pas possible de connaître qu'il eut souffert la moindre altération.

27. Il n'est pas douteux que l'air développé de quelque corps que ce soit, par l'action du feu, ou par une chaleur intestine, ne sert aucunement à la conservation de la flamme, & du feu, & que les moiens dont on se sert pour rendre ces fluides propres à la respiration des animaux, & à conserver leur élasticité, ne sont d'aucune utilité pour entretenir le feu (2) cependant en conséquence de la Théorie établie, que la chaleur endommage tellement l'air qu'il ne peut acquérir ses propriétés sans se renouveler, à moins qu'on ne lui fasse subir par le moyen de la glace un froid violent, & même pendant plusieurs heures, j'ai tenté cet expédient sur les fluides, & m'étant procuré une quantité de fluide élastique de la poudre dans un vase convenable

r 2

(1) Le mélange de l'esprit de nitre avec celui d'Ammoniac fait un effervescence que l'on dit froide, en effet elle ne manifeste aucune chaleur sensible.

(2) Comme on peut le voir au long dans les *comm. pag. 22.*

venable pour l'éprouver , je començai par introduire un flambeau allumé dans ce fluide non purgé , mais à peine eut-il approché qu'il fût éteint , je fermai aussitôt le trou par le moyen d'une platine bien ajustée , & j'entourai le vase de glace sur laquelle je mis du sel ammoniac , j'eus soin ensuite de faire ajouter à propos de la glace , & du sel , & après environ 12 heures , j'ouvris la platine sans exciter le moindre mouvement , & j'introduisis ensuite le flambeau allumé qui se conserva aussi bien que s'il eut été dans l'air commun . Des pareilles expériences faites sur l'air corrompu par l'effervescence du sel de tartre avec l'esprit de nitre donnèrent les mêmes résultats (v).

28. De tout ce que je viens de dire , il est clair que les moyens propres pour rendre à l'air la propriété d'être constamment élastique , & de servir à la respiration des animaux , ne peuvent pas réussir à lui rendre aussi celle d'entretenir le feu , parceque les fumées , les exhalaisons , & les vapeurs endommagent les deux premières , & la chaleur détruit celle-ci ; mais comme ces causes sont réunies dans l'inflammation de la poudre , ainsi tout ces caractères de l'air doivent nécessairement souffrir (x) toutes ces altérations ,

29. Après avoir établi ce principe universel dans le plein j'ai voulu examiner les effets , qui surviendraient en tirant
une .

(v) Dans le mémoire précédent j'ai mis sous un point de vue le plus clair qu'il m'a été possible les raisons pourquoi le fluide élastique de la poudre , quoiqu'il soit de l'air pur , ne peut cependant pas être propre à entretenir le feu ; elles suffisaient toutes seules à détruire la seconde objection du Célèbre Mr. Musschembroek , & à donner plus de poids à mon sentiment que j'avais appuyé d'un nombre de faits , mais comme il nous est réussi de jeter les fondemens d'une Théorie sur cet importante partie de la Physique , & que ne nous étant pas contenté d'avoir démêlé la véritable cause de la dépravation de l'air par rapport à la nourriture de la flamme dans des lieux clos , nous avons trouvés des moyens propres à lui rendre cette vertu , j'ai crû nécessaire de tenter des expériences , par lesquelles je pusse confirmer de plus en plus ce que j'avais dit , d'autant plus que le mobile de nos recherches sur ce point intéressant , avait été celui de décider la difficulté de l'Auteur mentionné .

(x) Cet article a été traité plus au long dans le *comm. pag. 33.*

une partie de l'air du récipient, à cet effet je disposai selon la méthode dont se servent les Physiciens une petite phiole qui contenait de l'esprit de nitre, enforte qu'on pouvait par le moyen d'une verge, qui passait à travers le sommet du récipient, faire verser le liquide dans un vase où j'avais mis de l'huile de tartre, sans introduire de l'air: je pompai à peu près la moitié de l'air, & après cela je procurai de saturer le mélange; la mixtion se fit avec une effervescence extraordinaire, de sorte qu'une partie du mélange se répandit sur la platine avec un grand bouillonnement, les oscillations suivirent à l'ordinaire, & après que le mouvement eut cessé, le mercure qui était resté suspendu dans la jambe exposée à l'air commença à remonter dans l'opposée, & s'arrêta ensuite à peu près à la même hauteur qu'il était avant la mixtion, je laissai l'appareil pendant long tems, & n'étant survenu aucun changement au mercure, j'observai que le sel n'était formé que çà & là en très petite quantité, j'exposai à l'air cette mixtion, & le sel se forma.

30. Je répétai deux fois cette expérience pour y introduire le flambeau qui s'y conserva allumé, mais on en voit assés la raison; c'est qu'en ouvrant le trou de la platine il s'introduisit beaucoup d'air commun & frais, qui servit à remplacer celui qui manquait.

31. L'on voit par tout ce que je viens de rapporter qu'il est très naturel qu'il se développe de l'air en mêlant les deux liquides, & qu'il soit ensuite entièrement réabsorbé; que le salpêtre, qui ne diffère du nitre régénéré que parcequ'il est naturel, contient une grande quantité d'air; en conséquence de ces notions d'ailleurs confirmées par un infinité d'autres expériences, que les Physiciens ont fait, je cherchai de m'assurer si le salpêtre a par lui-même la propriété expansive, & je fis l'expérience, de la manière, que je vais décrire.

Je

Je scellai hermétiquement dans une phiole de verre, du salpêtre, la quantité du sel occupait environ $\frac{1}{3}$ de la capacité: je la mis ensuite sur le feu que j'augmentai graduellement, en sorte que l'air se développait peu à peu sans souffrir une grande raréfaction au commencement de l'opération, & se trouvait ensuite très raréfié, lorsque ce qui restait était contraint de se déployer; après cinq à six minutes la phiole se brisa avec quelque détonnement; m'étant déterminé à la répéter, je jugeai à propos de sceller en même tems un autre phiole avec un bouchon de liège poussé à force, & bien battu, & après l'avoir mise sur les charbons en même tems qu'un autre fermée à la lampe, elle força le bouchon à un hauteur assez considérable, & il tomba à trois pieds loin du rechaud quelque tems avant que l'autre éclata.

33. Il est bon de remarquer que lorsque le bouchon fut loin, il ne sortit rien du salpêtre qui était resté liquide au bas de la phiole sans un grand bouillonnement d'où il s'ensuit que le salpêtre a la propriété de forcer les obstacles qui le retiennent, lorsque par le moyen du feu il peut dégager l'air qu'il contient, quoiqu'il ne s'enflamme pas pour autant.

34. Le sucre a aussi cette vertu, mais elle est moins sensible; je l'assujettis aux mêmes expériences, & quoique il ne la manifeste pas dans un tems aussi court, ni avec autant de violence il ne laisse pas de briser la phiole, & de chasser le bouchon. Il ne serait peut-être pas hors de propos d'examiner tous les sels essentiels; mais je réserve cet examen à un autre tems.

35. Le soufre contient un acide vitriolique, & une matière phlogistique, il a un nombre de propriétés qui nous sont connues. Le Célèbre Mr. Stahl s'est distingué dans l'analyse qu'il en a fait, Mrs. Halles, Muschembroek, & après

après eux bien d'autres Physiciens sont d'avis que les vapeurs du soufre brûlé absorbent l'air.

36. Ces deux grands Hommes ont décidé ce fait d'après les expériences dont ils se sont servis, mais comme elles ne sont pas tout à fait décisives, parceque le soufre étant allumé hors du récipient donne lieu à la raréfaction de l'air qui l'environne, & que lorsqu'il se refroidit, l'eau doit nécessairement monter considérablement (y), j'ai jugé à propos de lui mettre le feu avec un miroir ardent, & dès qu'il eut discontinué de brûler, je le laissai durant deux jours entiers, & j'ai observé que le mercure monta

sensiblement au dessus du niveau environ $\frac{2}{7}$ de ligne: cette ascension cependant se fit dans moins de quatre heures de tems; j'ai remarqué aussi que durant l'inflammation du soufre le mercure baissait dans le siphon, ce qui m'avait fait croire qu'il se développait de l'air, mais ayant eu soin de mettre le flacon à l'abris des rayons du soleil, ne laissant à découvert que ce qui était dardé par le foyer du miroir, j'ai vu une grande différence dans l'abaissement, que je crois d'autant plus causé par la raréfaction, qu'en le plongeant dans de l'eau qui avait aquis la température de l'air ambiant, le liquide remonta assés visiblement jusqu'au niveau sans discontinuer.

37. Le charbon est la troisième substance qui entre dans la composition ordinaire de la poudre à Canon; il est très-porueux, & on prétend que c'est ce qui lui donne la couleur brune que l'on lui voit, & un Célèbre Physicien (a) a observé que c'est en conséquence de cela qu'il prend feu aisément: il est composé de parties terrestres, & de parties crasses, ou phlogistiques. Cette matière ne nous fournit pas

(y) Stat. des végét.

(r) Boher, chaem.

pas des réflexions plus particulières. Je m'en vais donner maintenant comme je l'avais promis un détail des résultats que j'ai eu de plusieurs mélanges que j'ai jugé à propos d'essayer.

38. On obtient une espèce de fusée en mettant deux parties égales de soufre, & de salpêtre dans un creuset qu'on expose ensuite au feu, ou dans un creuset enflammé.

39. En substituant du charbon au soufre il se fait une explosion, & une déflagration subite, si l'on jette les deux matières dans un creuset enflammé, ou que l'on fait devenir rouge; cette déflagration est plus forte que la précédente.

40. Le soufre intimement broyé avec le charbon se consume plutôt que lorsqu'il est seul, si le charbon n'est pas réduit en poudre il s'enveloppe de la flamme du soufre sans pourtant s'embraser, & si ce charbon est en feu il s'éteint à mesure que le soufre se fond, & s'enflamme: si enfin on jette un charbon dans le soufre fondu la flamme de toute la surface l'entoure aussitôt presque en forme conique.

41. On parvient à un mélange des plus conditionnés pour la poudre en mettant 7 parties de Salpêtre, une de soufre, & une de charbon, cette combinaison nous ébauche tous les phénomènes de la poudre quoiqu'elle ne soit pas encore manufacturée.

42. Je crois ne devoir pas non plus passer sous silence, que la poudre s'enflamme dans quelque air infecté que ce soit, c'est ce que j'ai tâché de bien assurer, & il m'est réussi d'enflammer de la poudre dans un endroit rempli de la fumée d'une chandèle, une autre fois dans un flacon rempli de vapeurs de poudre, & enfin dans un autre plein de vapeurs sulfureuses, il est vrai que dans les deux dernières elle tarda plus long tems à s'enflammer apparemment parceque ces vapeurs avaient fixé une partie de l'air.

43. Un

43. Un mélange de soufre & de salpêtre étant moins facile à s'enflammer qu'un mélange de charbon, & de salpêtre, il me paraît qu'on doit conclure de là que le phlogistique du charbon quitte plus facilement, & plus promptement les parties terrestres auxquelles il est uni pour s'attacher à l'acide nitreux & le faire détonner, que celui du soufre; parceque celui-ci se trouve déjà retenu par l'acide vitriolique avec lequel il a une grande affinité.

44. En considérant donc la plus grande facilité que le dernier mélange en question a de se décomposer plus simultanément, ce qui ne peut de moins de lui procurer plus de force, & faisant ensuite attention aux désavantages que le soufre apporte aux armes à feu, je suis porté à croire que la poudre que l'on ferait sans soufre, ne pourrait être que d'un très grand usage dans plusieurs occasions (a).

45. Les effets de la poudre se manifestent donc en conséquence de l'inflammation du soufre qui met ensuite en feu le charbon pilé lequel donnant de l'effort au feu, communique un plus grand degré de chaleur au Salpêtre qui est décomposé par l'action du phlogistique auquel son acide s'unissant se dissipe avec bruit, & ainsi en vertu de l'action, & de la réaction de l'air généré, & de l'ambient, le feu se communique aux grains, ce qui sert à prouver aussi, comme le démontre Mr. le Chev. D'Archi, (b) que l'inflammation de la poudre est successive (c) ainsi que j'ai déjà fait observer.

(a) Cette conjecture que je n'ai déduite que des faits, se trouve confirmée par des expériences faites dans cette vue par un habile homme; il en donne un long détail dans l'Encyclopédie à l'article *feu artificiel*. Les essais qu'il a fait pour décider ce point paraissent assez décisifs, de sorte que je me dispense volontiers de mettre au long ici les autres réflexions qui m'ont porté à jeter cette proposition, on se fera satisfaire de celles que l'on trouve à l'endroit cité.

(b) Mém. de l'Acad. des Scienc. de Paris, ann. 1750.

(c) Presque dans tous les calculs qu'on a établis pour déterminer la vitesse d'un boulet chassé par la poudre hors d'un Canon; ou pour déterminer la force absolue de la poudre, on a posé que l'inflammation fut instantanée, parceque l'on n'avait pas tenté bien soigneusement de s'en assurer par l'expérience: d'où l'on peut inférer que ces calculs ne sont pas irrépréhensibles.

observer (d) : il est bon de remarquer ici en passant que cette union ne peut se faire que par la force ou vertu d'affinité, or il est probable que l'air se dégage aussi vite que l'acide se dissipe, & que c'est cette même force qui contraint les deux substances à s'unir réciproquement, qui en détermine le degré.

46. Quoique le sucre ait la propriété de se dilater comme nous avons vu (34), & de forcer en conséquence les obstacles qui s'opposent à son expansion, il ne m'a cependant jamais donné aucune marque assurée qu'il pût faire quelque explosion, quoique je l'eusse mêlé avec du soufre, & du charbon selon plusieurs proportions : il ne faisait que fuser très-lentement, lorsqu'il prenait feu.

47. Les matières grasses, & huileuses, comme le suif, la cire, les résines combinées avec le salpêtre produisent le même effet que si l'on avait mêlé du charbon avec du salpêtre, & elles n'agissent que lorsque le feu les a réduites en une espèce de charbon : le camphre quoiqu'il soit aussi de la nature des matières précédentes, cependant comme il est si facile à s'enflammer, & qu'il ne peut pas changer comme les autres, il ne procure pas une déflagration aussi violente au salpêtre, car le mélange s'enflamme à une chaleur très-modique.

48. On voit clairement par ce que je viens de rapporter qu'il faut que les matières soient propres à être réduites en charbon pour déflagrer avec le salpêtre, c'est à dire qu'elles puissent se dépouiller de l'eau, & des autres éléments par l'action du feu, & que le phlogistique ne se trouve plus uni qu'à des parties terrestres ; d'où il paraît que les autres éléments ont la propriété de retenir le phlogistique, ou celle d'empêcher qu'il agisse, en effet nous avons vu que le soufre dont le phlogistique est fortement retenu par l'acide vitriolique (43) fait une déflagration

(d) Voi. le mém. pag. 9. (14).

gration plus lente avec le salpêtre, que ne fait le charbon (39).

49. Le sucre qui quoique mêlé avec des matières grasses, ne fait aucune explosion non plus que plusieurs autres substances qui contiennent d'ailleurs une grande quantité d'air, ne ferait-il peut-être pas, comme elles, incapable de déflagration, parcequ'il ne se trouve pas dans le mélange une action d'affinité suffisante à les décomposer subitement, & par conséquent à donner un effort libre, & prompt à l'air qui est engagé, malgré l'action de la chaleur, & du feu? & quelques unes comme le camphre ne ferait ce point, parcequ'étant trop faciles à s'enflammer, elles ne laissent pas le tems aux autres matières d'acquiescer un degré de chaleur suffisant pour se décomposer? car si l'on substitue le camphre au soufre dans la composition de la poudre, ce mélange a beaucoup moins de force que celui du soufre, & du salpêtre.

50. La poudre fulminante ayant beaucoup de rapport à la matière que j'ai traitée jusqu'à présent: je crois en devoir maintenant faire l'objet de mes recherches.

51. L'explosion de la poudre fulminante comme l'on fait, est accompagnée d'un détonnement très violent, & infiniment supérieur à celui de la poudre à Canon; on a de plus remarqué qu'à l'occasion de sa décomposition elle perce la cuillère de métal dans laquelle on l'expose au feu, de sorte que plusieurs Physiciens ont pensé que cette poudre avait une particulière direction vers le bas: des autres, pour donner une explication du bruit horrible dont son explosion est suivie; ont crû que cet'étrange phénomène dépendait d'un plus grand développement de fluide: Mr. Halles cependant remarque très sensément que cet accraissement n'est pas causé par une plus grande quantité d'air qui se déploie, & il l'attribue à la fixité du sel de tartre, dont l'air ne peut se développer que par un très grand degré de chaleur.

52. Sans m'arrêter à donner la description de toutes les expériences que j'ai fait, je rapporterai seulement ce qui m'en est constamment résulté.

I.

En mettant le feu à la poudre fulminante de la manière que l'on le met à la poudre à Canon, elle ne fait que crépiter sans aucun détonnement, & ce n'est qu'avec peine qu'elle s'enflamme.

I I.

Pour pouvoir se décomposer, elle doit premièrement entrer en fusion, soit qu'elle soit en plein air, ou dans le vuide.

I I I.

Le fluide élastique qui en est produit a à peu près les mêmes caractères que celui de la poudre à canon, il est pernicieux à la respiration, il ne conserve pas toute son élasticité, & n'entretient pas le feu; on ne doit pas s'en étonner, car j'ai fait voir ci-devant, & dans le même page 11. & suiv: que les exhalaisons sulfureuses en sont la cause.

I V.

Ce mélange enfin qui détonne avec tant de violence dans l'air; qui se fait jour à travers une cuillère, ne fait aucun bruit dans le vuide, & ne brise pas seulement un flacon de verre le plus mince. J'ai fait cette expérience d'autant plus soigneusement qu'elle devait me fournir des grandes lumières; l'appareil fut des plus simple, un flacon ou j'avais mis de cette poudre était mastiqué à un long tuyau de verre, qui entra dans un petit récipient muni d'une tube de baromètre; après le vuide fait, indiqué par la hauteur de 27 pouces environ du mercure dans le tube, on plaça un rechaud plein de charbons en feu, après quelque tems la poudre se décomposa, & j'en fus averti par la lumière qui en émana; je ne quittai point le baromètre de vue, & la dépression du mercure fut très grande

au

au premier instant, & diminua ensuite considérablement. Enfin au tems qu'il devait avoir aquis la température de l'air ambiant, je trouvai le volume du fluide moindre, que si ç'avait été de poudre à Canon, d'ou l'on peut conclure avec assurance que ces grands effets ne dépendent pas d'un plus grand développement d'air.

53. Le phénomène dont j'ai fait mention ci devant de percer une cuillère, est donc celui sur le quel on s'est fondé pour attribuer à cette poudre la propriété d'exercer sa vertu élastique vers le bas: elle est cependant si surprenante qu'on ne saurait jamais imaginer en vertu de quoi les loix ordinaires de la nature seraient ici violées; c'est précisément ce qui m'a déterminé à constater ce fait par les expériences avant que de m'y reposer.

54. J'ai commencé par dire (52. IV.) que dans l'expérience que je fis dans un flacon vuide d'air, il n'y eut aucun détonnement, & que le verre n'en a rien souffert: j'ai mis une autre fois de cette poudre entre deux lames minces, & concaves en sorte qu'elles en étaient remplies, je les liai ensemble, & les mis au milieu des charbons ardents; après quelque tems il se fit une détonnement horrible, & je ne trouvai plus que quelque petit reste des lames: mais pour m'assurer encore d'avantage de ce fait je fis menager deux petites cuillères, en sorte qu'en remplissant l'espace concave de poudre fulminante l'air extérieur ne pouvait s'y introduire, je les mis ensuite dans le feu ayant pris mes précautions pour observer sans risque; dans quelque tems de là, la cuillère supérieure fut chassée en haut avec une impétuosité étonnante, & celle d'en bas ne souffrit rien.

55. L'on voit évidemment par ces expériences premièrement que la force élastique de cette poudre est uniforme en tout sens, & on peut déduire en rapprochant ce que j'ai

j'ai dit au commencement de ce paragraphe, que puisque les phénomènes qui se manifestent dans l'air n'ont plus lieu dans le vuide, il faut que la vitesse avec laquelle l'air se développe soit si subite, & si grande que l'air extérieur ne puisse avoir le tems de céder, & que par conséquent le fluide rencontre de la part de l'air une résistance supérieure à celle de la cuillère, qui a déjà souffert par l'action du feu, & par celle du foye de souffre qui se forme dans ce tems. L'on remarque même que si la cuillère est de fer, elle n'est point aussi aisément percée.

56. Si l'on considère que la résistance d'un milieu est en raison composée de la densité du même milieu, & de la vitesse du fluide qui heurte, & que la poudre à Canon ne rencontre pas assés de résistance de la part de l'air pour pouvoir réagir avec autant de force que la poudre fulminante sur les corps où il est placé, il faudra accorder à la vitesse immense du développement du fluide, l'action étonnante de cette poudre, qui par conséquent doit être infiniment supérieure à celle de l'autre.

Si donc la vitesse seule avec laquelle un fluide se développe, contribue si fort à son action, de manière que les effets de la poudre fulminante ne soient pas comparables pour l'intensité avec ceux de la poudre à Canon, il sera moins extraordinaire que par la lenteur du développement, ces matières dont nous avons parlé (46. 47.) qui contiennent une égale, & peut-être une plus grande quantité d'air que la poudre à Canon, ne puissent pas produire des effets approchans des siens.

57. L'inflammation d'un mélange de charbon, & de salpêtre déflagre plus promptement comme nous avons vu (33. 24.) que celui du souffre, & du salpêtre, donc cette poudre aura beaucoup plus de force que celle où il entre du souffre, & par conséquent outre l'épargne que l'on fera l'on

l'on obvierra encore aux endomagemens causés par le soufre, sur tout à l'évasement des lumières (e).

58. Il est connu que la poudre à Canon s'enflamme beaucoup plus vite, dans des espaces renfermés comme dans les pièces d'Artillerie, (*) & dans les mines, qu'en plein air: Outre cela les obstacles qu'elle rencontre ne la laissent éclater que lorsque la plus grande partie de son fluide est développé; c'est ce qui fait que son action est presque instantanée & ce qui rend ses effets semblables à ceux de la poudre fulminante.

59. Si nous faisons attention à présent aux substances qui entrent dans la composition de la poudre fulminante nous pourrions peut être découvrir d'où dépendent ses effets étonnans. Le soufre avec le salpêtre fait une poudre qui mise dans le creuset fuse lentement, & donne une explosion très faible, qu'on ajoute ensuite à ce mélange du sel de tartre, ce sera à la décomposition qui s'en fera que l'on aura tous ces phénomènes surprenans; donc la violence de l'explosion, & du détonnement seront un effet du sel, causé ou par l'humidité ou par l'alkalinité; ce n'est pas par l'humidité, & cela par plusieurs raisons la première se tire de la manière avec laquelle elle s'enflamme, on observe en effet à cette occasion qu'elle est non seulement toute desséchée mais qu'elle doit être en fusion (51. II.): la qualité de l'Alkali pour que cette poudre soit parfaite nous fournit une seconde raison, il doit être parfaitement calciné, car si l'est humide il ne fait plus autant d'effet; une poudre de cette espèce que j'ai fait me fournit la confirmation de ceci, elle était faite de deux parties de salpêtre, une de soufre, & deux de tartre réduit en char-

bon

(e) Je me crois dispensé de faire ici des applications de cette Théorie à l'usage de l'artillerie, ces recherches demanderaient un tems plus long, & un examen plus réfléchi, d'ailleurs Mr. le Chev. D'Antony, Directeur des écoles Théoriques de l'Artillerie prépare sur cette matière un ouvrage qui sera une nouvelle preuve de l'étendue de ses lumières dans toutes les sciences qui peuvent servir à la perfection de celle ci. (*) Mém. de l'Acad. de Science, an. 1750.

bon cette poudre contenait assurément beaucoup plus d'eau que la fulminante ordinaire, & cependant ne détonnait pas avec autant de violence quoique elle surpassa de beaucoup l'explosion de la poudre à Canon.

61. Une autre espèce de poudre fulminante que j'ai fait qui n'attire pas l'humidité, & qui n'a encore été indiquée par personne que je sache, me présente un troisième argument contre l'action de l'humidité, & concourt à faire voir que ces effets dépendent de l'alkalinité. J'employai du sel de soude qui ne contient point d'eau, & dont les cristaux n'attirent non seulement pas l'humidité de l'air, mais se réduisent encore comme en farine, les doses étaient les mêmes, parceque je ne cherchais pas de déterminer celles qui me donneraient la meilleure poudre, je l'exposai à l'accoutumé sur le feu, & elle ne détonna pas avec moins de force que l'ordinaire, j'oserais même avancer qu'elle était plus forte.

62. Ensuite donc des réflexions que nous avons fait sur ce sel, & remarquant ici que c'est l'alkali le plus puissant qu'il y ait, après celui qu'on retire des cendres des plantes terrestres, il me paraît que l'on doit conclure que la différence des effets qu'on voit arriver en faisant décomposer un mélange de soufre & de salpêtre, & un mélange de soufre, de salpêtre, & de sel de tartre, ne dépend aucunement de l'humidité, & que l'alkalinité est celle qui les produit.

63. J'ai cependant encore voulu m'assurer s'il ne se trouve point d'autres causes qui agissent aussi; il me paraissait que le degré de chaleur devait y contribuer. J'ai à cet effet tenté de faire du foye de soufre avec un alkali volatil, & m'étant reussi, je le mélai avec du salpêtre, mais le mélange ne fit aucune explosion, probablement parcequ'il s'est dissipé avant que le salpêtre ait pû se décomposer; de façon qu'il paraît clair qu'il est nécessaire que

que les matières du mélange puissent acquérir un certain degré de chaleur.

64. Je pense que l'action de l'alkali sur les autres matières vient de ce que, dans le tems que les substances se fondent, il se forme un foye de soufre dans lequel le phlogistique étant uni à un sel neutre, il s'en sépare moins difficilement que lorsqu'il ne se trouve qu'avec l'acide vitriolique, dans le soufre même, & qu'il peut par conséquent se développer avec plus de vitesse pour détonner avec l'acide nitreux, tout ceci semble encore être confirmé par les expériences que j'ai fait.

65. En premier lieu ayant substitué du charbon au soufre il ne s'ensuivit plus aucune fulmination, mais comme dans ce cas le phlogistique a pour base des parties terrestres, & l'alkali n'ayant aucune action particulière sur cette terre, le développement du phlogistique ne peut pas être favorisé.

66. Je fis ensuite une poudre composée successivement de plusieurs doses de tartre vitriolé, de charbon, & de salpêtre, croyant qu'il se serait peut-être fait un foye de soufre, lequel en se décomposant avec le salpêtre aurait pu faire le mêmes effets que la poudre fulminante, mais il ne me réussit pas, & ce mélange au contraire fit une explosion plus lente que si je n'y avais point mis du tartre vitriolé, ce qui me fait croire que le degré de chaleur nécessaire au salpêtre pour se décomposer avec le charbon, est moindre, que celui qui est nécessaire pour faire ce foye de soufre (f) & que par conséquent le charbon détonne avec le salpêtre avant que le phlogistique puisse s'unir au tartre vitriolé, & faire le foye de soufre.

t

67. Je

(f) On voit aisément que le foye de soufre dont je parle ne peut pas se faire sans une chaleur aussi modique que celui qu'on fait communément.

1. 67. Je fis enfin divers mélanges de charbon , & de salpêtre , auxquels j'ajoutai l'acide vitriolique uni à différentes bases , afin d'avoir une espèce de poudre fulminante , dont les combinaisons des composans fussent variées , mais je n'ai pas réussi non plus que dans celle du tartre vitriolé , je crois que ce que j'ai dit par rapport à celle-là sert aussi pour donner la raison de ce que je viens d'exposer . Il me reste encore bien des recherches , que je me suis proposé sur la poudre à canon , sur celle-ci , & sur le rapport, que peuvent avoir avec elles les métaux fulminans , mais je me réserve de traiter plus amplement de la première dans la traduction que je donnerai de l'ouvrage de Mr. Benjamin Robins , qui a déjà été enrichi par les notes que le grand Géomètre Mr. Euler y a fait , & j'aurai occasion une autre fois de parler des deux dernières .





RECHERCHES

SUR LA NATURE, ET LA PROPAGATION

DU SON.

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

INTRODUCTION.



VOIQUE la Science du Calcul ait été portée dans ces derniers tems au plus haut degré de perfection, il ne paroît cependant pas qu' on se soit beaucoup avancé dans l'application de cette Science aux phénomènes de la Nature. La Théorie des fluides qui est assurément une des plus importantes pour la Physique, est encore très imparfaite dans ses élémens, malgré les efforts de plusieurs grands Hommes qui

qui ont tenté de l'approfondir. Il en est de même de la matière que j'entreprends d'examiner ici, & qu'on peut avec raison regarder comme un des principaux points de cette Théorie. Car le Son ne consistant que dans de certains ébranlemens imprimés aux corps sonores, & communiqués au milieu élastique qui les environne, ce n'est que par la connoissance des mouvemens de ce fluide, qu'on peut espérer de découvrir sa véritable nature, & de déterminer les lois qu'il doit suivre dans sa propagation.

Newton, qui a entrepris le premier de soumettre les fluides au calcul, a aussi fait sur le Son les premières recherches; & il est parvenu à en déterminer la vitesse par une formule, qui ne s'éloigne pas beaucoup de l'expérience. Mais si cette théorie a pu contenter les Physiciens dont la plupart l'ont adopté, il n'en est pas de même des Géomètres qui en étudiant les démonstrations sur lesquelles elle est appuyée, n'y ont pas trouvé ce degré de solidité, & d'évidence qui caractérise d'ailleurs le reste de ses Ouvrages. Cependant aucun que je sache, ne s'est jamais attaché à découvrir, & à faire connoître les principes qui peuvent les rendre insuffisantes; encore moins a-t-on entrepris de leur en substituer de plus surs, & de plus rigoureux (*).

Les

(*) Voici comment parle un des plus Célèbres Géomètres de notre tems dans son excellent traité des fluides art. 219. Ce seroit ici le lieu de donner des Méthodes pour déterminer la vitesse du son, mais j'avoue que je ne suis point encore parvenu à trouver sur ce sujet rien qui pût me satisfaire. Je ne connois jusqu'à présent que deux Auteurs qui aient donné des formules pour la vitesse du son, savoir M. Newton dans ses Principes, & M. Euler dans sa dissertation sur le feu qui a partagé le prix de l'Académie en 1738. La formule donnée par M. Euler sans démonstration est fort différente de celle de M. Newton; & j'ignore quel chemin l'y a conduit; à l'égard de la formule de M. Newton elle est démontrée dans ses Principes, mais c'est peut être l'endroit le plus obscur, & le plus difficile de cet Ouvrage: M. Jean Bernoulli le fils dans la Pièce sur la Lumière, qui a remporté le prix de l'Académie en 1736, dit qu'il n'oseroit pas se flatter d'entendre cet endroit des Principes ec.

Les Commentateurs des *Principes* ont à la vérité tâché de rétablir cet endroit par une Méthode purement analytique ; mais outre qu'ils n'ont envisagé la question que sous un point de vue tout-à-fait particulier , leurs calculs sont d'ailleurs si compliqués , & embarrassés dans des suites infinies , qu'il ne paroît pas , qu'en puisse en aucune façon acquiescer aux conclusions qu'ils se sont efforcés d'en déduire .

J'ai donc cru qu'il étoit nécessaire de reprendre toute la question dans ses fondemens , & de la traiter comme un sujet entièrement nouveau , sans rien emprunter de ceux qui peuvent y avoir travaillé jusqu'à présent .

Tel est l'objet que je me suis proposé dans les Recherches suivantes . Pour le faire mieux connoître je commence par donner une idée de la théorie de M. Newton , & des difficultés aux quelles elles est sujette .

C'est dans la section VIII. du II. Livre des *Principes* que se trouve renfermée toute cette théorie . L'Auteur considère d'abord la propagation du mouvement dans les fluides élastiques , & la fait consister dans des dilatations , & des compressions successives , qui forment comme autant de pulsations , & qui se répandent à la ronde par tout le fluide . Il passe ensuite à examiner comment ces pulsations peuvent être produites par le frémissement des parties d'un corps sonore quelconque . Il imagine pour cela qu'une particule du fluide poussée par les vibrations du corps contigu condense par une certaine distance les particules suivantes ; jusqu'à ce que la condensation étant devenue la plus grande , les mêmes particules comencent à se dilater de part , & d'autre ; ce qui forme selon lui une infinité de fibres sonores qui partent toutes du même point , comme d'un centre commun . Il veut de plus que chacune de ces premières fibres en engendre une autre égale à son extrémité ,
lorsqu'

IV.

lorsqu'elle a achevé une oscillation entière, & celle-ci une troisième, & ainsi successivement, de sorte qu'il se forme, pour ainsi dire, autour du corps sonore plusieurs voutes sphériques, qui aillent toujours en s'élargissant, tout de même, comme l'on observe dans les ondes, qui s'excitent sur la surface d'une eau tranquille, par l'agitation de quelque corps étranger que ce soit.

Voilà quels doivent être selon cet Illustre Auteur les mouvemens des particules de l'air qui produisent, & propagent le son. Mais M. Newton est encore allé plus loin; il a calculé tous les mouvemens particuliers, qui composent chacune des pulsations. Pour y parvenir il regarde les fibres élastiques de l'air comme composées d'une infinité de points physiques disposés en ligne droite, & à égale distance les uns des autres. La méthode qu'il emploie pour déterminer les oscillations de ces points consiste à les supposer d'abord isochrones, & toujours les mêmes dans chacun d'eux. M. Newton prouve ensuite que cette hypothèse s'accorde entièrement avec les Loix-mécaniques qui dépendent de l'action mutuelle, que les points exercent en vertu de leur ressort; d'où il conclut, qu'en effet ces mouvemens sont tels qu'il les a supposé; & comme à chaque oscillation il doit s'engendrer selon lui une nouvelle fibre égale, & semblable à la première; il trouve l'espace, que le son parcourt, dans un tems donné en calculant seulement la durée d'une simple vibration.

M. Jean Bernoulli le fils dans son excellente Pièce sur la Lumière a aussi déterminé d'après les mêmes hypothèses la vitesse du son; son procédé diffère pourtant de celui de M. Newton en ce qu'il a d'abord supposé que les vibrations des particules sont parfaitement isochrones; ce qui est précisément, ce que ce Grand Géomètre s'étoit proposé de démontrer. Aussi n'est-il pas surprenant que ces deux Au-
teurs

teurs soient arrivés à la même formule pour la vitesse du son : et l'accord apparent de leurs calculs ne peut être apporté comme une preuve des fondemens de la Théorie qu'on vient d'exposer (*).

A l'égard des premières propositions sur la formation des fibres élastiques, & sur tout de leur comparaison avec les ondes, je crois inutile de m'arrêter davantage à les examiner. Car outre que plusieurs Auteurs en ont déjà fait voir le peu de solidité, & l'insuffisance même pour l'explication.

(*) M. Bernoulli prouve à la vérité dans l'Ouvrage cité, que tout corps qui est tenu en équilibre par deux puissances égales, & directement contraires, s'il vient à être tant soit peu déplacé doit faire autour de son point de repos des oscillations simples, & régulières. Mais cette théorie n'est guère applicable qu'au seul cas, où il n'y ait qu'un corps mobile. Pour le faire sentir, supposons d'abord selon cet Auteur, que le corps soit sollicité selon deux directions contraires par les forces égales P , & Q , il est clair que ces forces ne pourroient être que des fonctions de la distance du corps à un point fixe quelconque; donc si on lui fait parcourir une espace infiniment petit ds la somme des accroissemens de ces deux forces sera exprimé par $p ds$, ce qui donnera par conséquent la force accélératrice qui porte le corps vers son point d'équilibre; & comme on ne veut considérer que les mouvemens infiniment petits on supposera p constant, d'où la force donnée deviendra proportionnelle à la distance à parcourir ds , & les oscillations se feront selon les loix connues de l'isochronisme. Mais il n'en sera pas de même s'il y a plusieurs corps qui se soutiennent mutuellement en équilibre, quoique rangés tous sur la même droite. Dans ce cas les forces P , Q , P^1 , Q^1 , P^{11} , Q^{11} qui agissent sur chacun d'eux feront des fonctions de leurs distances intermédiaires, ainsi ds^1 , ds^{11} , ds^{111} représentant les déplacements infiniment petits de tous les corps, on aura pour les forces accélératrices des expressions de cette forme $p ds^1 + q ds^{11} + r ds^{111}$, où p , q , r &c. peuvent être regardées comme constantes. D'où il est aisé de comprendre que les mouvemens des corps, ne seront plus atteints au simple isochronisme; & c'est proprement ce qui arrive aux particules des fibres élastiques de l'air. C'est aussi par cette raison que le calcul qu'on trouve dans le Commentaire des Principes seroit encore insuffisant même quand il ne renfermeroit pas des approximations; puisque on n'y considère que trois, ou quatre particules mobiles. M. D'Alembert a fait sentir cette difficulté pour le cas d'une corde vibrante chargée de plusieurs petits poids pag. 359. des Mémoires de Berlin pour l'année 1750.

plication des phénomènes du Son (*), la manière avec laquelle elles sont présentées dans les *Principes* fait voir évidemment que l'Auteur ne les adoptoit, que comme des simples hypothèses pour simplifier la nature d'un problème assez composé de lui même. Et quand même ces hypothèses seroient vraies, ne seroit-on pas en droit d'en exiger une démonstration? Or cette démonstration doit nécessairement dépendre de la résolution générale du problème proposé. Il faut donc avouer que la Théorie de M. Newton seroit même à cet égard bien éloigné de pouvoir entièrement satisfaire à son objet. Mais il y a plus le Théorème dans lequel il détermine les lois des oscillations des particules est fondé sur des principes insuffisants, & même fautifs.

Le Célèbre M. Euler paroît s'en être aperçu dès l'année 1727., comme l'on voit dans une Thèse sur le Son soutenue à Bale la même année. Cependant M. Cramer est, je crois, le premier qui en ait donné une preuve solide, & convaincante (**). Il fait voir que le procédé de M. Newton peut également s'appliquer à démontrer cette autre proposition savoir : que les particules élastiques suivent dans leurs mouvemens les lois d'un corps pesant qui monte, & qui tombe librement; ce qui est tout-à-fait incompatible avec l'isochronisme des oscillations, que l'Illustre Auteur Anglois a prétendu établir. Cette remarque seule paroîtroit suffire pour faire tomber entièrement la Théorie en question. Cependant comme les grands Hommes ne doivent être jugés, que d'après l'examen le plus exact, & le plus rigoureux, l'on auroit tort de la rejeter.

(*) Voies la suite de l'article des fluides cité ci-dessus. Voies encore le Mémoire de M. de Mairan dans l'Académie de Paris année 1737., la Physique de Perrault, & d'autres.

(**) Voies les Commentaires des *Principes*.

VII.

rer, avant que d'en avoir démontré l'insuffisance d'une manière qui ne laissa plus rien à désirer.

Voilà le premier pas que j'ai pensé devoir faire en entrant dans les recherches que je m'étois proposé sur la nature, & la propagation du son.

J'ai donc commencé par étudier avec toute l'attention dont j'ai été capable les propositions de M. Newton dont il s'agit, & j'ai trouvé en effet qu'elles sont fondées sur des suppositions incompatibles entr'elles, & qui portent nécessairement à faux. C'est ce que j'ai tâché de faire voir par deux voies différentes dans le premier Chapitre de la Dissertation suivante. Cet objet ainsi rempli, je me suis appliqué à rechercher des méthodes directes, & générales pour résoudre le problème proposé, sans employer d'autres Principes que ceux qui tiennent immédiatement aux lois connues de la Dynamique.

Pour donner à mes recherches le plus de généralité qu'il est possible, & pour les rendre en même tems applicables à ce qui se passe réellement dans la nature, j'ai d'abord envisagé la question sous le même point de vue sous lequel tous les Géomètres, & les Physiciens l'ont regardé jusqu'ici; & je doute qu'on puisse jamais réduire le problème sur les mouvemens de l'air qui produisent le son, à un énoncé plus simple, que celui-ci. Savoir.

Etant donné un nombre indéfini de particules élastiques rangées en ligne droite qui se soutiennent en équilibre, en vertu de leurs forces mutuelles de répulsions, déterminer les mouvemens, que ces particules doivent suivre dans le cas qu'elle aient été, comme que ce soit, dérangées, sans sortir de la même droite.

Pour en faciliter la résolution, je suppose seulement que les particules sont toutes de même grandeur, & douées d'une même force élastique, & de plus, que leurs mouvemens

VIII.

vemens sont toujours infiniment petits : conditions que je ne crois pas pouvoir porter la moindre atteinte à la nature du problème envisagé physiquement.

En examinant les équations trouvées d'après ces seules données, je me suis bientôt aperçu qu'elles ne différoient nullement de celles qui appartiennent au problème de *chordis vibrantibus*, pourvu qu'on suppose les mêmes corpuscules, disposés de la même manière dans un cas que dans l'autre ; d'où il s'ensuit qu'en augmentant leur nombre à l'infini, & diminuant les masses dans la même raison, le mouvement d'une fibre sonore dont les particules élastiques se touchent mutuellement, doit être comparé à celui d'une corde vibrante correspondante (*).

Ceci m'a donc conduit à parler des théories, que les grands Géomètres, Mrs. Taylor, D'Alembert, & Euler ont donné sur ce sujet. J'expose en peu de mots leurs différens, & les objections que M. Daniel Bernoulli a fait aux deux derniers ; & après avoir soigneusement examiné les raisons des uns, & des autres, j'en conclus que les calculs, qu'on a fait jusqu'à présent, ne sauroient décider de telles questions, & que c'est nécessairement à la solution générale que nous avons en vue qu'il faut s'en rapporter.

J'entreprends donc cette solution dont l'analyse me paroit en elle même neuve, & intéressante, puisque il y a un nombre indéfini d'équations à résoudre à la fois. Heureusement la méthode que j'ai suivie m'a mené à des formules qui ne sont pas fort composées, eu égard au grand nom-

(*) C'est une justice que l'on doit ici au Célèbre M. D'Alembert, que de faire remarquer qu'il avoit déjà trouvé ce rapport entre les deux problèmes mentionnés dans l'art. XLVI. de son premier Mémoire sur les cordes vibrantes dans l'Académie de Berlin. Mais il ne paroît pas, du moins que je sache, qu'il en ait jamais fait aucun usage.

nombre d'opérations, par où j'ai été obligé de passer. Je considère d'abord ces formules dans le cas, ou le nombre des corps mobiles est fini, & j'en tire aisément toute la théorie du mélange des vibrations simples, & régulières que M. Daniel Bernoulli n'a trouvé que par des voies particulières, & indirectes. Je passe ensuite au cas d'un nombre infini de corps mobiles, & après avoir prouvé l'insuffisance de la théorie précédente dans ce cas, je tire de mes formules la même construction du problème de *chor-dis vibrantibus*, que M. Euler a donné, & qui a été si fort contestée par M. D'Alembert. Je donne de plus à cette construction toute la généralité dont elle est capable, & par l'application que j'en fais aux cordes de Musique, j'obtiens une démonstration générale, & rigoureuse de cette importante vérité d'expérience, savoir que quelque figure qu'on donne d'abord à la corde la durée de ses oscillations se trouve néanmoins toujours la même (*).

A cette occasion je développe la Théorie générale des sons harmoniques, qui résultent d'une même corde, de même que celle des instrumens à vent. Quoique ces deux théories aient été déjà proposées, l'une par M. Sauveur, & l'autre par M. Euler, cependant je crois être le premier qui les ait immédiatement déduit de l'Analyse.

Je viens maintenant au principal objet de mes recherches, savoir aux loix de la propagation du son. Je suppose qu'une particule d'air reçoive du corps sonore une impulsion quel-

con-

(*) Le savant M. D'Alembert cité ci-dessus dans l'article III. de son Addition au mémoire des cordes vibrantes, imprimée dans le tome de l'Académie de Berlin pour l'année 1750., fait à ce propos la remarque suivante. *Il est vraisemblable qu'en général quelque figure que la corde prenne, le tems d'une vibration sera toujours le même, & c'est ce que l'expérience paroît confirmer, mais ce qui seroit difficile, peut être impossible de démontrer en rigueur par le calcul.* Je ne rapporte ces paroles d'un si grand Géomètre, que pour donner une idée de la difficulté du problème que j'ai résolu.

conque , je trouve par l'application des mes formules qu'il se communique d'une particule à l'autre un mouvement qui n'est qu'instantané , & qui ne dépend en rien de la force du premier ébranlement. La vitesse avec laquelle se fait cette communication est déterminée par la même formule, que M. Newton avoit déjà donné pour la vitesse du Son , & dont les résultats se trouvent aillés conformes à l'expérience. Le calcul me conduit ici à traiter des échos simples, & composés, & la théorie que j'établis n'est sujette à aucune des difficultés qui se rencontrent dans l'explication, que le Physiciens en ont donné jusqu'à présent. Ces recherches sont suivies d'un examen du mélange des sons, & de la manière avec laquelle ils peuvent se répandre dans le même espace sans se troubler, ou se confondre en aucune façon. Je tire enfin de mes formules une explication rigoureuse , & incontestable de la résonance & du frémissement naturel des cordes harmoniques au bruit de la principale; Phénomène connu depuis long-tems , & pour lequel on a inventé plusieurs systèmes, sans être parvenu à en donner une raison satisfaisante.

Voilà les principaux objets que j'ai traité dans la Dissertation présente , & que le défaut de tems , & quelques autres obstacles imprévus m'ont empêché d'expliquer avec plus d'ordre , & de netteté. Je suis bien éloigné de croire qu'elle contienne une théorie complète sur la nature , & la propagation du son ; mais ce sera du moins avoir contribué à l'avancement des Sciences Physico-Mathématiques, que d'avoir démontré par le calcul plusieurs verités qui avoient jusqu'ici paru inexplicables dans la nature ; et l'accord de mes résultats avec l'expérience servira peut-être à détruire les préjugés de ceux qui semblent désespérer , que les Mathématiques ne puissent jamais porter des vrayes lumières dans la Physique. C'est un des principaux buts que je m'étois proposé pour le présent.

RE-

SECTION PREMIERE.

Recherches sur la nature du son.

CHAPITRE PREMIER.

Des oscillations des parties intimes des fluides élastiques.

1. **J'**Entreprends avant tout d'examiner la Théorie que M. Newton a renfermée dans la section VIII. du II. Livre des Principes Mathématiques. Laisant a part toute discussion sur la formation des ondes, & des fibres sonores, dont on a parlé dans l'Introduction, je m'attache principalement à l'Analyse du théorème, dans lequel il prétend établir, que chaque particule d'un fluide élastique homogène suit dans ses mouvemens les mêmes loix, qu'un pendule qui décrit une cycloïde dont la longueur égale l'excursion totale de la particule, & ou la pesanteur qui l'anime est équivalente à l'élasticité naturelle du fluide. Pour démontrer que cette proposition est conforme à la vérité, supposons d'abord, dit M. Newton, qu'elle le soit en effet, & voyons ce qui s'ensuivra. Il cherche donc d'après une pareille supposition la force accélératrice des particules, & il trouve que cette force est précisément la même, qui fait mouvoir un pendule dans des arcs de la cycloïde donnée. Pour faire mieux sentir l'inexactitude, & l'insuffisance du procédé qui l'a conduit à cette conclusion, j'ai cru devoir convertir le théorème en problème, en supposant d'abord inconnue, ou indéterminée la loi des mouvemens

vemens qu'on se propose de trouver. Pour cela il n'y a d'autres changemens à faire aux propositions de M. Newton, que de substituer au lieu du cercle dont les arcs expriment les tems, & les coupées les espaces parcourus, une autre courbe quelconque qui fasse la même fonction.

Je rapporterai donc ici la proposition dont il s'agit, & j'aurai soin de me servir des mêmes expressions de l'Auteur autant qu'il me sera possible.

Propositio XLVII. LIB. II. Problema.

2. Pulsibus per fluidum elasticum propagatis invenire legem, qua singulae fluidi particulae motu reciproco brevissimo eunt, & redeunt accelerantur, & retardantur.

Designent (Fig. 1.) AB, BC, CD &c. pulsum successivorum aequales distantias; ABC plagam motus pulsum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica medii quiescentis in recta AC ad aequales ab invicem distantias sita; Ee, Ff, Gg spatia aequalia perbrevia, per quae puncta illo motu reciproca singulis vibrationibus eunt, & redeunt; ϵ , ϕ , γ loca quaevis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas physicas, seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatae in loca $\epsilon\phi$, $\phi\gamma$, & ϵf , $f g$. Rectae Ee aequalis ducatur recta PS; Et super ipsa describatur curva in se rediens PHShP. (Fig. 2.) Per hujus peripheriam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipsius partibus proportionalibus, sic ut completo tempore quovis PH, vel PHSh, si demittatur ad PS perpendiculum HL, vel hl, & capiatur Ee aequalis PL vel Pl, punctum physicum E reperietur in ϵ ; hac lege punctum quodvis E eundo ab E per ϵ ad ϵ , & inde redeundo per ϵ ad E vibrationes singulas peraget, prout fert natura curvae propositae PHShP; invenienda est hujusmodi curva. In peripheria PHSh capiantur aequales arcus HI, IK, vel hi, ik

i k eam habent rationem ad peripheriam totam, quam habent
 aequales rectae *EF*, *FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*,
 & demissis perpendicularis *IM*, *KN*, vel *im*, *kn*, quoniam
 puncta *E*, *F*, *G* motibus similibus successive agitantur, & vi-
 brationes suas integras ex *itu*, & reditu compositas interea
 peragunt dum pulsus transfertur a *B* ad *C*, si *PH*, vel *PHSh*
 sit tempus ab initio motus puncti *E* erit *PI*, vel *PHSi* tem-
 pus ab initio motus puncti *G*, & propterea *Eε*, *Fφ*, *Gγ*
 erunt ipsis *P.L*, *P.M*, *P.N* in *itu* punctorum, vel ipsis *Pl*,
Pm, *Pn* in punctorum reditu, aequales respective. Unde *εγ*
 seu *EG + Gγ - Eε* in *itu* punctorum aequalis erit *EG*
 - *LN* in reditu autem aequalis *EG + ln*; sed *εγ* latitu-
 do est; seu expansio partis Medii *EG* in loco *εγ*; & propie-
 rea expansio partis illius in *itu* est ad ejus expansionem me-
 diocrem, ut *EG - LN* ad *EG*, in reditu autem ut *EG +*
ln, seu *EG + LN* ad *EG*.
 Unde *vtz* elastica puncti *F* in loco *εγ* est ad ejus vim elasticam
 mediocrem in loco *EG* ut $\frac{EG - LN}{EG}$ ad $\frac{1}{EG}$ in *itu*; in reditu
 vero ut $\frac{EG + ln}{EG}$ ad $\frac{1}{EG}$; & eodem argumento vires elasti-
 cae punctorum physicorum *E*, & *G* in *itu* sunt ut $\frac{1}{EG - MR}$
 & $\frac{1}{EG - QM}$ ad $\frac{1}{EG}$ (ductis scilicet (Fig. 3.) perpendi-
 culis *DR*, *FQ*, quae intercipient partes arcus *FH*, *KD*
 aequales ipsis *HI*, *IK*), & virium differentia ad medii
 vim elasticam mediocrem, ut $\frac{QM - MR}{(EG - MR)(EG - QM)}$ ad
 $\frac{1}{EG}$; hoc est ut $\frac{QM - MR}{EG}$ ad $\frac{1}{EG}$, sive ut *QM - MR*
 ad *EG*, si modo (ob angustos vibrationum limites) sup-
 ponamus *MR*, *QM* indefinite minores esse quantitate *EG*;
 quare cum quantitas *EG* detur, differentia virium est, ut

$\frac{RM}{EG}$

4

$QM - MR$. Sed differentia illa (idest excessus vis elasticae puncti e supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta Medii lineola physica $e\gamma$ acceleratur, & propterea vis acceleratrix lineolae physicae $e\gamma$ est, aut differentia linearum QM , & MR ; igitur ex Mechanicae principiis differentia ista esse debet, ut fluxio secunda spatii quod describitur a particula $e\gamma$, posita scilicet fluxione prima temporis constante. Jam vero quoniam ex hypotesi tempora exprimuntur per arcus, & spatia per abscissas respondentes erunt MR , & QM fluxiones primae spatiorum PR , PQ , adeoque $QM - MR$ aequabitur fluxioni secundae spatii PR , vel etiam PM , quod ab illo infinite parum differt; quum itaque partes arcus DI , IF aequentur inter se habebimus ad determinandam curvam $PHSh$ sequentem aequationem identicam $QM - MR = QM - MR$, seu $0 = 0$ quod nihil indicat.

3. Cette conclusion vague, & indéterminée, que nous venons de trouver, nous apprend donc clairement la raison pour laquelle les principes de M. Newton peuvent nous conduire également à des résultats très différens entr'eux, comme M. Cramer l'a ingénieusement démontré dans l'hypothèse, que les particules élastiques suivent dans leurs mouvemens la même loix, que les corps pesans qui montent, ou qui descendent alternativement. Mais suivons encore la théorie de M. Newton, & passons à la proposition 49. dans laquelle il détermine le tems que chaque particule doit employer à faire une oscillation entière. Or comme de la proposition précédente il résulte que toute courbe rentrante $PHShP$ peut également exprimer la relation entre les espaces, & les tems, l'on sera aussi bien en droit de substituer au cercle dans cette proposition une courbe quelconque, & d'y appliquer généralement les mêmes raisonnemens que M. Newton a fait sur son hypothèse particulière. Soit donc

PRO-

4. *Datis Medii densitate, & vi Elastica invenire velocitatem pulsum.*

Fingamus Medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi, sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adaequet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis, & centrum oscillationis sit A, & quo tempore pendulum illud oscillationem integram exiit, & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiae circuli radio A descripti aequale. Nam stantibus, quae in Prop. 47. constructa sunt, si lineola quaevis physica EF singulis vibrationibus describendo spatium PS urgeatur in loco quovis $\epsilon\gamma$ a vi Elastica, quae eadem omnino sit, quam proposita spatiorum, & temporum scala $PHShP$ requirit seu $= \frac{QM - MR}{HK} \times M$, de-

notante M massam, seu pondus lineolae physicae EG, peraget haec vibrationes singulas tempore PHS, & oscillationes integras tempore PHShP; id adeo, quia vires aequales aequalia corpuscula per aequalia spatia simul impellent.

Sed vis elastica, qua lineola physica EG in loco quovis $\epsilon\gamma$ existens urgeatur erat. (in demonstratione Prop. 47.) ad ejus vim totam elasticam, ut $QM - MR$ ad EG; & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur est ad pondus lineolae, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolae longitudinem EG, adeoque ex aequo vis, qua lineola EG in loco quovis $\epsilon\gamma$ urgeatur, est ad lineolae illius pondus, ut $(QM - MR) A$ ad EG ; hinc vis ista erit ad vim superius inventam $\frac{QM - MR}{HK} \times M$, ut

A

$\frac{A}{EG}$ ad $\frac{1}{HK}$. Porro $HK = 1 KI$ & $EG = 1 EF$; unde quum ex constructione propositionis antecedentis habeatur $KI: EF = PHShP: BC$ erit etiam $HK: EG = PHShP: BC$ unde proportio virium supra inventa transmutabitur in hanc $\frac{A}{BC}: \frac{1}{[PHShP]}$. Quare cum tempora, quibus aequalia corpora per aequalia spatia impelluntur sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa elastica, ad tempus $PHShP$ in subduplicata ratione $\frac{BC}{A}: (PHShP)^2$, seu ut $\frac{BC}{\sqrt{A}}: PHShP$. Quum itaque consequentia in hac analogia eadem sint, aequalia esse debebunt & antecedentia; hinc orietur tempus vibrationis unius lineolae EG urgente vi elastica $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. Sed tempore vibrationis unius, ex itu & re-
ditu compositae pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC ; ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium BC erit $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium BC est ad tempus, quo percurreret longitudinem circumferentiae circuli, cujus radius est A aequalem in eadem ratione, scilicet, ut $BC: \pi A$ (posita scilicet pro π ratione circumferentiae ad radium) adeoque erit hoc tempus $= \frac{\pi A}{\sqrt{A}} = \pi \sqrt{A}$; sed ex theoria pendulorum reperitur etiam tempus oscillationis unius penduli longitudinis A $= \pi \sqrt{A}$; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurreret longitudinem huic circumferentiae aequalem.

5. Voila donc un nouveau paradoxe déduit des Principes de Mr. Newton, savoir que quelle que soit la loi des mouvemens des particules élastiques le tems des oscillations

lations est néanmoins toujours le même. Ces deux propositions que nous venons de détailler, contiennent toute la théorie que cet Auteur a donné concernant les mouvemens de l'air qui font l'objet principal de la Dissertation présente, c'est pourquoi nous les examinerons ici avec tout le soin possible. Pour peu qu'on réfléchisse sur la nature des démonstrations précédentes, on s'apercevra sans peine que les défauts de cette théorie dépendent moins de l'enchaînement des raisonnemens que des Principes, & des *données* que l'Auteur adopte tacitement pour la solution du problème. Ces *données* étant développées se réduisent aux suivantes. 1.^{me} Que les mouvemens de toutes les particules soient exprimés par le même lieu géométrique, d'où il suit qu'il doivent être tous d'une même nature. 2.^{de} Que ces particules se communiquent le mouvement dans des tems égaux, en sorte qu'elles viennent toutes à passer successivement par les mêmes degrés de mouvement. Il est constant qu'on ne peut admettre aucune de ces suppositions, si on n'a auparavant démontré qu'elles sont des conséquences nécessaires des conditions données du problème. Or tant s'en faut que dans notre cas la chose soit ainsi, qu'au contraire ce sont ces mêmes conditions qui détruisent entièrement celles qui dépendent de l'action mutuelle, que les parties exercent en vertu de leurs forces répulsives. Pour développer cette difficulté dans toute son étendue, ainsi que l'importance de la matière, & l'autorité du grand Homme, dont les égaremens mêmes nous sont instructifs, semblent l'exiger, je vais donner l'Analyse pure & exacte du problème, dont il s'agit telle, que peuvent la fournir les premiers Principes de Mécanique.

6. Soient selon les premières suppositions de Mr. Newton (Fig. 1.) *E, F, G* &c. des Points Physiques qui composent le milieu élastique, lorsqu'il est en repos; soient ensuite

ensuite parvenus ces mêmes points en ϵ , ϕ , γ , de sorte qu'il restent néanmoins dans la même ligne droite BC ; qu'on dénote les espaces rectilignes parcourus $E\epsilon$, $F\phi$, & $G\gamma$ par y^I , y^{II} , y^{III} , & supposant que la première distance EF , FG entre ces points soit $= r$, l'on aura $\epsilon\phi = r + y^{II} - y^I$; $\phi\gamma = r + y^{III} - y^{II}$; or la force d'élasticité naturelle qui agit entre les points E, F, G est exprimée par $\frac{A \times M}{r}$, comme il est démontré dans la

Prop. 49. ci-dessus, où M dénote le poid de chaque particule, & A est la hauteur d'une colonne homogène du même fluide, dont la pesanteur égale le ressort naturel des particules; donc lorsque les points E, F, G viennent à être transportés en ϵ, ϕ, γ cette force d'élasticité se changera en $\frac{A \times M}{\epsilon\phi} = \frac{A \times M}{r + y^{II} - y^I}$ pour les points

ϵ & ϕ , & en $\frac{A \times M}{\phi\gamma} = \frac{A \times M}{r + y^{III} - y^{II}}$ pour les points ϕ & γ , & ainsi de suite; par conséquent la différence de ces deux forces donnera la force motrice de la particule intermédiaire ϕ , laquelle se trouvera $= AM \times \left(\frac{1}{r + y^{II} - y^I} - \frac{1}{r + y^{III} - y^{II}} \right)$, c'est à dire $= AM \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^I}{(r + y^{II} - y^I)(r + y^{III} - y^{II})}$. Mais, comme les particules sont supposées devoir faire des excursions assez petites, les différences $y^{III} - y^I$, & $y^{III} - y^{II}$ des espaces parcourus s'évanouiront auprès de la quantité r , d'où il résulte pour la force motrice de la particule F , $AM \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^I}{r}$,

qui est celle qui fait parcourir l'espace y^{II} . De la même manière on trouvera pour les autres particules des expressions des forces motrices toutes semblables à celle-ci; d'où si l'on nomme t le tems écoulé depuis le commencement

cement du mouvement de la particule E , & si l'on fait ses différences dt constantes on obtiendra par les Principes de la Mécanique l'équation suivante qui contient les loix du mouvement de la particule F , savoir :

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} = \frac{2 Ah}{T^2} \times \frac{y''' - 2 y'' + y'}{r}, \text{ où } h \text{ est l'espace}$$

qu'un corps pesant parcourt librement en tombant durant le tems T ; de même on aura pour la particule suivante G l'équation

$$\frac{d^2 y'''}{dt^2} = \frac{2 Ah}{T^2} \times \frac{y^{iv} - 2 y''' + y''}{r}, \text{ \& ainsi des autres.}$$

En général, si l'exposant de y exprime toujours la place que tient la particule qui parcourt l'espace y , en comptant depuis la première E , on trouvera pour le mouvement de la particule, dont le quantième du rang est m , l'équation

$$\text{générale } \frac{d^2 y^m}{dt^2} = \frac{2 Ah}{T^2} \times \frac{y^{m+1} - 2 y^m + y^{m-1}}{r}. \text{ Ces}$$

équations, comme il est aisé de le voir, sont en même nombre que les particules mobiles, dont on cherche les mouvemens; c'est pourquoi le problème étant déjà absolument déterminé par leur moyen, on est obligé de s'en tenir là, de sorte, que toute condition étrangère qu'on voudra introduire, ne peut pas manquer de rendre la solution insuffisante, & même fautive. Mais pour connoître distinctément quelle atteinte doivent porter à l'Analyse ci-dessus expliquée les hypothèses particulières que Mr. Newton a imaginées, pour faciliter peut être le problème qui de sa propre nature est très-compiqué, nous allons réduire ces hypothèses en formules.

7. Pour cela nous commencerons par remarquer que si t est le tems écoulé depuis le commencement du mouvement de la particule E , il faudra en vertu de la seconde hypothèse qu'il se soit écoulé un tems $t + dt$, afin que la particule suivante F ait pû se mouvoir durant

un tems t ; il faudra aussi un tems $t + e dt$ pour un mouvement semblable de la particule suivante G , & ainsi pour les autres; d'où il s'ensuit que, puisque toutes les particules sont supposées suivre les mêmes loix par l'hypothèse première, l'espace parcouru par le point F , durant le tems t , sera égal à l'espace parcouru par la particule G pendant le tems $t + dt$, & que l'espace parcouru par le point E pendant le tems t sera le même que l'espace parcouru par la particule G dans le tems $t + 2 dt$; or y' , y'' , y''' expriment les espaces parcourus par les particules E , F , G , &c. dans le même tems t , on aura donc $y'' = y''' + dy'''$; $y' = y''' + 2 dy''' + d^2 y'''$; maintenant si l'on substitue ces valeurs de y' & de y'' , dans l'expression $y''' - 2 y'' + y'$, l'équation qui contient le mouvement de la particule F se changera en celle-ci $\frac{d^2 y''}{dt^2} = \frac{2 Ah}{T^2} \times \frac{d^2 y'''}{r^2}$; mais $y'' = y''' + dy'''$, & par conséquent $d^2 y'' = d^2 y''' + d^2 y'''$, l'on aura donc l'équation $\frac{d^2 y''' + d^2 y'''}{dt^2} = \frac{2 Ah}{T^2} \times \frac{d^2 y'''}{r^2}$, ou bien en négligeant le terme $d^2 y'''$, & divisant tout par $d^2 y'''$ nous aurons $\frac{1}{dt^2} = \frac{2 Ah}{T^2 r^2}$, équation, qui comme on voit, ne contient plus aucune des variables y' , y'' , y''' &c. On trouvera par des raisonnemens semblables que toutes les autres équations se réduiront encore à celle-ci, laquelle par conséquent pourra être vraie quelles que soient les valeurs des y , pourvu que l'on ait $d^2 = \frac{T^2 r^2}{2 Ah}$. Maintenant si l'on nomme θ le tems d'une oscillation entière, on aura $\theta = PHShP$ & $dt = KI$; par conséquent $dt:EF = \theta:BC$; par la Prop. 49., savoir $dt = \frac{1}{BC} \theta$ & $d^2 = \frac{r^2 \theta^2}{BC^2} = \frac{T^2 r^2}{2 Ah}$; d'où l'on tire

$$\theta =$$

$\theta = \frac{BC \times T^2}{2Ab}$ & $\theta = \frac{T \times BC}{\sqrt{2Ab}}$ qui est la même expression que nous avons déjà trouvé pour la mesure du tems dans la *Prop.* 49.

Tout ce que nous venons de démontrer suffit assés, ce me semble, pour faire connoître à fond l'insuffisance & la fausseté de la méthode de Mr. Newton. Nous allons donc chercher une autre voie qui nous mène à une solution du problème, dont il s'agit fondée sur des Principes surs & incontestables.

8. Pour envisager d'abord la question sous le point de vue le plus-simple & le plus général qu'il soit possible, je regarde avec Mr. Newton les fluides élastiques comme des amas de corpuscules, qui se fuient mutuellement selon les loix connues de l'élasticité. Imaginons donc une suite de corps qui aient tous la même masse, & qui soient rangés sur une même ligne droite, à distances égales les uns des autres; supposons de plus que ces corps se repoussent mutuellement par des forces élastiques qui suivent la raison inverse des distances; & pour contenir l'action continuelle de ces forces de répulsion, qui tendent sans cesse à écarter les corps les uns des autres, qu'on considère les deux extrêmes comme fixes & immobiles, en sorte que quelque mouvement qu'on excite dans leur système, il demeure toujours renfermé entre les deux limites données. Maintenant soit le nombre des corps mobiles $= m - 1$, leur masse $= M$, la force du ressort naturel $= E$, en conservant les autres suppositions ci-dessus (art. 6.), on trouvera que les mouvemens de tout le système seront contenus dans les équations suivantes;

$$\frac{d^2 y^1}{dt^2} = \frac{2 E h}{MT^2} \times \frac{y'' - 2 y^1}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{12}}{dt^2} = \frac{2 E h}{MT^2} \times \frac{y''' - 2 y'' + y^1}{r}$$

b 2

 $d^2 y'''$

$$\frac{d^2 y^{m+1}}{dt^2} = \frac{2 E h}{M T^2} \times \frac{y^{m+1} - 2 y^{m+2} + y^{m+3}}{r}$$

Ces équations seront au nombre de $m - 1$, savoir en même nombre que les corps mobiles, & de plus toutes semblables, excepté la première & la dernière, dans lesquelles les quantités y^0 & y^m , qui représenteroient selon l'ordre établi les espaces parcourus par le premier & dernier corps, doivent être à cause de l'immobilité de ces corps, supposées égales, à zero ; la dernière de ces équations se trouvera donc

$$\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2 E h}{M T^2} \times \frac{-2 y^{m-1} + y^{m-2}}{r}.$$

C'est en intégrant toutes ces équations, & en tirant des valeurs pour chaque inconnue y^1, y^2, y^3 &c. exprimées par la même variable t que l'on parviendra à déterminer les mouvemens de tous les corps qui composent le système proposé ; mais avant que d'entrer dans ces recherches, il est nécessaire de traiter des causes qui peuvent produire de tels ébranlemens dans les parties intimes des fluides élastiques. Nous nous bornerons ici aux cordes vibrantes, dont les mouvemens sont plus connus, & qui, peut être, sont les seuls de cette espèce qui ne se refusent pas à l'Analyse.



Des vibrations des cordes :

9. SOIT AB (Fig. 4.) une corde tant soit peu extensible, & qu'on puisse considérer abstraction faite de sa gravité, & de sa roideur ; supposons qu'elle soit attachée fixément aux deux points immobiles A , & B qui la tiennent tendue avec une force égale au poid P . Soit de plus cette corde chargée de tant de corpuscules E , F , G &c. qu'on voudra, qui aient tous la même masse M , & qui soient éloignés les uns des autres, par des intervalles égaux AE , EF &c. Il est évident par les Principes de la Mécanique que, si les points E , F , G &c. viennent à être écartés de la ligne droite, en sorte qu'ils décrivent les lignes infiniment petites Ee , Ff , Gg &c. chacun de ses points f sera poussé vers F par une force égale à $P \times \sin : efg$. Or si l'on nomme y^i , y^{ii} &c. : les excursions Ee , Ff &c. des corps E , F , & qu'on fasse l'intervalle constant $AE = EF = r$ on aura $\sin : efg = \frac{y^{iii} - 2y^{ii} + y^i}{r}$; d'où l'on tire pour le mouvement du

corps F l'équation $\frac{d^2 y^{ii}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{iii} - 2y^{ii} + y^i}{r}$

on trouvera de même pour le mouvement du corps suivant

G , l'équation $\frac{d^2 y^{iii}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{iiii} - 2y^{iii} + y^{ii}}{r}$, & ainsi

pour les autres. Par conséquent si les corps attachés à la corde sont au nombre de $m-1$ on aura en général pour leurs mouvemens, quels qu'ils soient, les équations suivantes.

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{ii} - 2y^i}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{ii}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{iii} - 2y^{ii} + y^i}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{11}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{11} - 2y^{111} + y^{1111}}{r}$$

&c.

Dont le nombre sera encore $m-1$, & la dernière sera exprimée par $\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{-2y^{m-1} + y^{m-11}}{r}$.

Il est visible que toutes ces équations sont entièrement semblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvemens des corps élastiques, & qu'il n'y a qu'à faire $P = E$, pour qu'elles deviennent tout-à-fait les mêmes, d'où il s'ensuit que les deux problèmes qui y répondent sont de même nature, & qu'en en résolvant un, on résout l'autre en même tems.

Imaginons que le nombre des corps dans l'un & dans l'autre cas augmente à l'infini, & que leurs masses diminuent en même raison, les globules rangés en ligne droite formeront des fibres élastiques, telles qu'on peut les concevoir dans l'air commun, & la corde tendue deviendra une corde uniformément épaisse dans toute sa longueur, comme le sont les cordes de Musique; le même rapport subsistera donc encore entre les oscillations des parties de l'une & de l'autre, par conséquent la théorie des mouvemens des cordes étant connue, l'on pourra par une simple application en déduire celle des mouvemens de l'air qui produisent le son. Ces deux problèmes sont donc liés entr'eux, non seulement par leur nature même, mais encore par les Principes, d'où dépendent leurs solutions. Comme la matière des vibrations des cordes a déjà été traitée par des grands Géomètres, il sera à propos de rappeler ici en peu de mots les principales méthodes qu'ils ont imaginé pour cela. J'entrerai dans ce détail d'autant plus volontier, que ces Auteurs sont peu d'accord sur les Principes, & dans les résultats,

ce

ce qui pourroit faire douter de la généralité, & de la rigueur de leurs solutions.

10. Le premier qui ait tenté de soumettre au calcul le mouvement des cordes vibrantes est le célèbre Mr. Tailor dans son excellent ouvrage de *Methodo Incrementorum*.

Il suppose d'abord, & il prétend même le démontrer que la corde doit toujours prendre des figures telles, que tous ses points arrivent en même tems à la situation rectiligne; d'où il déduit que ces figures ne peuvent être que celles d'une espèce de cycloïdes allongées, qu'il nomme *compagnes de la cycloïde*. Voici son procédé.

Nommant x une abscisse quelconque (Fig. 5.) AE , & y l'ordonnée Ee qui dénote la distance du point E de la corde à l'axe dans un tems quelconque t , on démontrera par le même raisonnement de l'art. 9., que la force accélératrice du point e vers E est exprimée par $-\frac{P}{M} \times \frac{d^2y}{dx^2}$. Soit a la longueur de toute la corde, &

S son poid total on aura $M = \frac{S dx}{a}$; & par consé-

quent la force accélératrice en e deviendra $= -\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$.

Or afin que toute la corde puisse reprendre sa situation rectiligne, l'Auteur suppose cette force proportionnelle à la distance Ee , que le point e doit parcourir; ainsi en faisant K égale à une ligne quelconque il obtient l'équation —

$\frac{aP}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{K}$; d'où en faisant $\frac{S}{aPK} = f$, il résulte

par les méthodes connues $x\sqrt{f} = \text{Arc. sin.} \left(\frac{y}{Y} \right)$; & y

$= Y \sin. (x\sqrt{f})$, équation de la courbe pour un tems quelconque t , où l'ordonnée Y est la plus grande. Or comme le point e en parcourant l'espace eE est continuellement poussé par une force accélératrice proportionnelle

nelle à l'espace qui reste à parcourir, l'on aura $-\frac{d^2y}{dt^2}$;
 $= \frac{2h}{T^2} \times \frac{y}{K}$, d'où si l'on fait encore pour abrégér $\frac{2h}{T^2 K}$
 $= g$, l'on tirera de nouveau $t\sqrt{g} = \text{Arc. sin.} \left(\frac{y}{Y}\right)$, &
 $y = Y \sin. (t\sqrt{g})$. Equation qui donne pour un tems
 quelconque t le rapport de l'éloignement y du point e de
 l'axe, à son plus grand éloignement Y , donc si l'on
 met au lieu de Y la valeur de y qui convient à la cour-
 be la plus grande AeB , & que avons trouvé plus haut
 $Y \sin. (x\sqrt{f})$, il en résultera l'expression générale des
 y pour tous les tems t , & pour chaque coupée x , savoir
 $y = Y \sin. (x\sqrt{f}) \times \sin. (t\sqrt{g})$; & telle est l'équa-
 tion de la corde vibrante dans l'hypothèse de Mr. Taylor,
 en supposant qu'elle soit en ligne droite au commence-
 ment de son mouvement.

Si la corde eut d'abord eu la figure d'une trochoïde
 allongée, alors, puisque t croissant, y diminueroit, on
 auroit trouvé $y = Y \sin. (x\sqrt{f}) \times \cos. (t\sqrt{g})$, ou
 $y = Y \sin. (x\sqrt{f})$ exprimerait la figure de la corde
 au commencement.

Pour déterminer la constante K qui entre dans les
 quantités f & g , on remarquera que y doit être $= 0$,
 soit qu' x soit $= 0$, soit qu' x soit $= a$, quelle que soit
 la valeur de t . Or en posant $x = 0$, on a d'abord
 $y = 0$, parceque $\sin. 0 = 0$. Qu'on fasse donc $x = a$,
 & $\sin. (a\sqrt{f}) = 0$; si $1 : \pi$ est la raison du rayon du
 cercle à la circonférence, l'on sait que $\sin. \frac{\pi}{2} = 0$, prenant
 pour s un nombre quelconque entier, c'est pourquoi l'on aura
 $a\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2}$, & $\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2a}$; or $\sqrt{f} = \sqrt{\frac{S}{aPK}}$, ce qui
 donne

donne $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{s\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{Sa}}$; & par conséquent $\sqrt{g} = \frac{1}{T}$
 $\sqrt{\frac{2h}{K}} = \frac{s\pi}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}}$.

12. Cette solution que nous venons d'expliquer, outre qu'elle porte sur l'hypothèse entièrement gratuite, que tous les points de la corde s'étendent en même tems en ligne droite, est encore bien éloignée d'être générale, même dans cette hypothèse, puisqu'il faudroit encore démontrer que c'est dans le seul cas des forces accélératrices proportionnelles aux distances des points de la corde à l'axe, que tous ses points peuvent toucher l'axe dans le même instant. C'est pour suppléer à ce défaut, que le célèbre Mr. D'Alembert a imaginé une autre méthode de résoudre le problème *de chordis vibrantibus* pris dans le sens le plus général qu'il soit possible. Cette méthode qui est sûrement une des plus ingénieuses, qu'on ait tiré jusqu'ici de l'Analyse, se trouve détaillée dans deux Mémoires que l'Auteur a donné dans le Tome de l'Académie Royale de Prusse, dont nous avons fait mention ci-devant. Je ne rapporterai ici que les Principes, sur lesquels elle est appuyée, & les conséquences qui en résultent pour la théorie en question.

L'on a vu (art. 11.) que la force accélératrice du point *E* en *e* est exprimée généralement par $-\frac{Pa}{s} \times \frac{d^2y}{dx^2}$, quelle que soit la courbe de la corde tendue *AeB*; donc puisqu'elle tend à faire parcourir au point *E* l'espace *eE* = *y*, elle devra être égale à $-\frac{T^2}{2b} \times \frac{d^2y}{dt^2}$, l'on aura donc pour l'équation générale de la courbe dans un tems quelconque *t*, $\frac{Pa}{s} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{d^2y}{dt^2}$. Il faut d'abord remarquer dans cette équation que la différentielle d^2y du premier

premier membre doit être prise en regardant l' x seule comme variable, au lieu que dans la différentielle d^2y du second membre c'est le seul tems t qui doit varier. Les Géomètres ont coutume de mettre de telles expressions entre deux parenthèses de la manière suivante $(\frac{d^2y}{dx^2})$, $(\frac{d^2y}{dt^2})$

afin que l'on puisse juger par la simple inspection, laquelle des variables x , ou t doit être changeante dans la différentiation de y . Soit pour abrégé $\frac{2 P a h}{ST^2} = c$, &

on aura à intégrer l'équation $(\frac{d^2y}{dt^2}) = c (\frac{d^2y}{dx^2})$. Or

Mr. D'Alembert trouve par une Analise neuve & ingénieuse, que l'équation finie qui répond à celle-ci est $y = \Psi. (t\sqrt{c} + x) + \Gamma. (t\sqrt{c} - x)$, Ψ & Γ exprimant des fonctions quelconques des quantités $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$. Voila donc quelle sera l'équation générale de la courbe, que peut former une corde tendue. A l'égard de la nature des fonctions exprimées par Ψ & par Γ , elles sont en elles mêmes indéterminées; mais puisque les deux bouts de la corde sont supposés fixes, il est évident qu'elles doivent satisfaire à ces deux conditions, savoir que y soit $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$ quel que soit le tems t ; l'on aura par là les deux équations $\Psi (t\sqrt{c}) + \Gamma (t\sqrt{c}) = 0$, & $\Psi (t\sqrt{c} + a) + \Gamma (t\sqrt{c} - a) = 0$; il résulte de la première $\Gamma = -\Psi$, & ainsi la seconde se change en $\Psi (t\sqrt{c} + a) - \Psi (t\sqrt{c} - a) = 0$, laquelle doit être vérifiée par la nature même de la fonction Ψ . Supposant donc une fonction quelconque Ψ qui soit telle, que $\Psi (t\sqrt{c} + a) = \Psi (t\sqrt{c} - a)$, quelle que soit la valeur de t , on aura généralement pour la corde tendue l'équation $y = \Psi (t\sqrt{c} + x) - \Psi (t\sqrt{c} - x)$. L'on sait, que toute fonction peut être représentée par l'ordonnée d'une

d'une courbe, dont l'abscisse soit la variable contenue dans la fonction proposée; donc si l'on décrit une courbe quelconque qui ait des ordonnées égales à toutes les abscisses exprimées par $t\sqrt{c} + a$, & $t\sqrt{c} - a$, cette courbe donnera une construction fort simple de l'équation proposée, car on n'aura qu'à prendre les ordonnées qui répondent aux abscisses $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$, dont la différence donnera l'ordonnée de la courbe, que forme la corde sonore dans un tems quelconque t . Or puisque la fonction Ψ doit rester la même, soit qu'on ajoute, ou qu'on retranche de la changeante $t\sqrt{c}$ la quantité a , si l'on suppose dans l'équation générale $y = \Psi(t\sqrt{c} + x) - \Psi(t\sqrt{c} - x)$, que le tems t soit augmenté de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ la valeur de y n'en sera en rien dérangée,

& ainsi la corde au bout d'un tems $= \frac{a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$

reprendra toujours la figure qu'elle avoit au commencement de ce tems; c'est pourquoi si la corde dans ses mouvemens se trouve une fois étendue en ligne droite, elle reviendra en cette situation après chaque tems t , qui contiendra un certain nombre de fois exactement le tems

$T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$; l'on a donc une infinité d'autres courbes dif-

férentes de la *compagne de la trochoïde allongée*, donnée par Mr. Taylor, qui toutes sont douées de cette propriété, que tous leurs points se retrouvent en même tems dans l'axe. Mr. D'Alembert a fait ensuite beaucoup de recherches ingénieuses sur la nature de ces courbes, qu'il nomme génératrices, & sur la manière, dont elles peuvent être engendrées, mais comme ces discussions n'ont pas un rapport immédiat au sujet que nous avons en vuë, nous nous contenterons de renvoyer le Lecteur aux Mémoires cités.

13. Mr. Euler a traité depuis dans le Tôme suivant le même problème par une méthode analogue à celle dont nous venons de parler. Il parvient à cette équation $y = \phi(x + t\sqrt{c}) + \phi(x - t\sqrt{c})$, dans laquelle la fonction ϕ doit être telle, que $\phi(t\sqrt{c}) + \phi(-t\sqrt{c}) = 0$, & $\phi(a + t\sqrt{c}) + \phi(a - t\sqrt{c}) = 0$, quelle que soit la valeur de t , ce qui ne diffère pas essentiellement de ce qu'on a trouvé ci-devant. Mr. Euler conclut de-là, que toute courbe *anguiforme* $CcAaBbD$ (Fig. 6.) continuée de part & d'autre à l'infini par des parties semblables CcA , AaB , BbD &c., situées alternativement au dessus, & au dessous de l'axe, sera propre à représenter la fonction ϕ , soit que cette courbe soit régulière, ou qu'elle soit irrégulière. D'où il s'ensuit que, puisque au commencement du mouvement l'équation de la courbe est $y = 2\phi(x)$, il suffira de considérer la courbe initiale de la corde AaB , quelle qu'elle soit, & si on réitère sa description au dessous, & au dessus de l'axe de part & d'autre à l'infini, la moitié de la somme des ordonnées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{c}$, $x - t\sqrt{c}$ dans la courbe composée $CcAaBb$, sera l'ordonnée à l'abscisse x dans la courbe de la corde tendue après un tems quelconque t .

14. Cette construction de Mr. Euler est évidemment beaucoup plus générale que celle, que Mr. D'Alembert a imaginé, celui-ci ayant toujours supposé que la courbe génératrice fut régulière, & qu'elle puisse être renfermée dans une équation continuë. C'est dans cette idée que ce grand Géomètre a cru qu'une telle construction devenoit insuffisante toutes les fois que dans la courbe génératrice, on n'auroit pas suivi la loi de continuité, & il s'est contenté d'en avertir le Public dans une Addition à ses Mémoires imprimée dans le Tôme de l'année 1750.

Mr. Euler a tâché de répondre à cette objection dans le Tôme pour l'année 1753.; il reprend ici toute l'Ana-
life

lité du problème, & il soutient constamment contre Mr. D'Alembert que pour l'exactitude de la construction donnée, il n'est nullement nécessaire d'avoir égard à la loi de continuité dans la fonction ϕ , qui dépend de la courbe initiale de la corde. Mais comme Mr. D'Alembert n'a apporté aucune raison particulière pour appuyer son objection, Mr. Euler n'en a aussi apporté aucune, d'où il suit que la question reste encore indécidée. Mr. D'Alembert promet dans sa nouvelle Edition de l'excellent Traité de Dynamique de l'Année passée un Ecrit assez étendu sur cette matière; mais je ne sais pas s'il ait encore vu le jour; en attendant, qu'il me soit permis de faire sur cette dispute la réflexion suivante.

15. Il est certain que les Principes du calcul différentiel & intégral dépendent de la considération des fonctions variables algébriques; il ne paroît donc pas qu'on puisse donner plus d'étendue aux conclusions tirées de ces Principes que n'en comporte la nature même de ces fonctions. Or personne ne sauroit douter que dans les fonctions algébriques toutes leurs différentes valeurs ne soient liées ensemble par la loi de continuité; c'est pourquoi il semble indubitable, que les conséquences qui se déduisent par les règles du calcul différentiel & intégral, seront toujours illégitimes dans tous les cas, où cette loi n'est pas supposée avoir lieu. Il s'ensuit de-là, que, puisque la construction de Mr. Euler est déduite immédiatement de l'intégration de l'équation différentielle donnée, cette construction n'est applicable par sa propre nature qu'aux courbes continues, & qui peuvent être exprimées par une fonction quelconque des variables t & x . Je conclus donc que toutes les preuves qu'on peut apporter pour décider une telle question, en supposant d'abord que l'ordonnée y de la courbe, soit une fonction de t & u , comme l'ont fait jusqu'ici Mr. D'Alembert, & Mr. Euler, sont

sont absolument insuffisantes ; & que ce n'est, que par un calcul tel que celui, que nous avons en vuë, dans lequel on considère les mouvemens des points de la corde chacun en particulier, qu'on peut espérer de parvenir à une conclusion qui soit à l'abris de toute atteinte.

16. Pendant le cours d'une telle dispute entre deux des plus grands Géomètres de notre siècle, il s'est élevé un troisième Adversaire contre tous les deux ; c'est le célèbre Mr. Daniel Bernoulli si avantageusement connu par ses excellens Ouvrages. Celui-ci dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie Royale de Berlin de l'annee 1753. prétend avoir démontré que la solution de Mr. Tailor de *chordis vibrantibus* est seule capable de satisfaire à tous les cas possibles d'un tel problème, & il établit cette proposition générale, que, quel que puisse être le mouvement d'une corde tendue, elle ne formera toujours que des trochoïdes allongées, ou bien que sa figure sera un mélange de deux, ou plusieurs courbes de cette espèce. Or nous avons trouvé plus haut (art. 11.), que dans l'hypothèse de Mr. Tailor l'équation de la corde vibrante est généralement $y = Y \sin. \left(\frac{s \pi x}{2a} \right) \times \cos. \left(\frac{s \pi t}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}} \right)$; donc posant différentes constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c pour Y , & mettant au lieu d' s les nombres 1, 2, 3 &c. il résulte pour l'équation générale de la corde selon Mr. Bernoulli.

$$\begin{aligned} y = & \alpha \sin. \left(\frac{\pi x}{2a} \right) \times \cos. \left(\frac{\pi t}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}} \right) \\ & + \beta \sin. \left(\frac{2 \pi x}{2a} \right) \times \cos. \left(\frac{2 \pi t}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}} \right) \\ & + \gamma \sin. \left(\frac{3 \pi x}{2a} \right) \times \cos. \left(\frac{3 \pi t}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}} \right) \\ & + \delta \sin. \left(\frac{4 \pi x}{2a} \right) \times \cos. \left(\frac{4 \pi t}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}} \right) \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

L'Au-

L'Auteur déduit cette ingénieuse théorie par une espèce d'induction qu'il tire de la considération des mouvemens d'un nombre de corps qui sont supposés former des vibrations régulières & isochrones; il démontre que s'il n'y a qu'un seul corps, il doit suivre les loix connues de l'isochronisme, que s'il y en a deux, leurs vibrations peuvent être censées composées de deux vibrations isochrones de la première espèce, & ainsi de suite; d'où il conclut que l'équation générale apportée ci-dessus sera propre à exprimer toutes ces espèces de mouvemens, en prenant autant des termes qu'il y a de corps; & que dans le cas de la corde tendue le nombre des termes doit être infini; il appuie de plus son sentiment sur l'expérience qui nous enseigne, que d'une même corde il résulte plusieurs sons harmonieux, qui répondent pour ainsi dire à chaque terme de son équation. Enfin il étend cette théorie à tous les mouvemens réciproques infiniment petits, qui ont lieu dans la nature, & il croit pouvoir en déduire beaucoup de conséquences importantes. Toutes ces choses sont exposées en détail par l'Auteur dans la pièce citée, à laquelle nous renvoyons les Lecteurs; il me suffira d'en avoir donné en général une idée assez nette.

Le dessein de Mr. Bernoulli étoit donc de faire voir que les calculs des Mrs. D'Alembert, & Euler ne nous apprennent rien de plus, que ce qu'on pouvoit déduire de ceux de Mr. Taylor, & même que ces calculs, quoique extrêmement simples pouvoient répandre sur la nature des vibrations des cordes une lumière qu'on attendroit en vain de l'Analyse abstraite & épineuse de ces deux Géomètres.

17. L'un d'eux, savoir Mr. Euler s'est hâté de répondre à ces objections dans la même Dissertation citée, qui est imprimée à la suite de celles de Mr. Bernoulli. Il objecte à son tour à celui-ci, que son équation pour la courbe

courbe sonore, quoique continuée à l'infini, ne peut cependant exprimer tous les mouvemens possibles d'une corde tendue; car si l'on pose $x = 0$ l'équation de la courbe devient $y = \alpha \sin. \left(\frac{\pi x}{2a} \right) + \beta \sin. \left(\frac{2\pi x}{2a} \right) + \gamma$

$\sin. \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) + \&c.$ Par conséquent il faudroit que cette équation renfermat toutes les figures qu'on peut donner à une corde tendue, savoir toutes les courbes possibles, ce qui ne paroît pas être à cause de certaines propriétés, qui semblent distinguer les courbes comprises dans cette équation de toutes les autres courbes qu'on pourroit imaginer; ces propriétés sont les mêmes que Mr. D'Alembert requiert dans ses courbes génératrices, savoir qu'en augmentant, ou diminuant l'abscisse d'un multiple quelconque de l'axe, la valeur de l'ordonnée y ne change point. En effet l'on peut, ce me semble, démontrer que toutes les courbes douées de ces propriétés pourront se réduire à l'équation ci-dessus. D'où il s'ensuit, que quoique Mr. D'Alembert ait trouvé l'Analyse Tailorienne insuffisante pour en tirer une résolution générale, néanmoins il paroît convenir avec Mr. Bernoulli dans le fond de la chose, savoir que le problème ne soit résolvable dans d'autres cas, que dans ceux de la trochoïde, ou du mélange de plusieurs trochoïdes.

18. On voit de-là, que les objections de Mrs. Bernoulli, & D'Alembert contre Mr. Euler, quoiqu'elles diffèrent beaucoup les unes des autres, tiennent néanmoins aux mêmes Principes. Au reste ni Mr. Bernoulli, ni Mr. Euler n'ont fait voir directement, si toutes les courbes que peut former une corde tendue sont comprises ou non dans l'équation rapportée; car, puisque dans cette équation chaque terme répond, pour ainsi dire, aux mouvemens de chaque point de la corde, il eut fallu pour cela
donner

donner d'abord une solution générale du problème de la corde vibrante dans l'hypothèse qu'elle fut chargée d'un nombre indéfini de corps; solution que Mr. Bernoulli même avoue n'avoir jamais vu, & qu'il croit de plus que personne n'ait jamais donnée.

Il résulte de tout cet exposé que l'Analise que nous avons proposée dans le chapitre précédent est, peut être, la seule qui puisse jeter sur ces matières obscures une lumière suffisante à éclaircir les doutes qu'on doit former de part, & d'autre. Je vais donc entreprendre cette Analise, & je tâcherai de la développer dans toute son étendue, non seulement parcequ'elle doit satisfaire à tous les objets que nous avons ici en vue; mais encore parce qu'elle est, ce me semble, entièrement neuve, puisque il s'agit de déterminer les mouvemens de tant de corps qu'on en voudra supposer sans concevoir d'abord qu'il y ait entr'eux aucune loi de continuité, par laquelle ils soient liés, pour ainsi dire, & contenus dans une même formule.



Solution du Problème général proposé dans les chapitres précédens.

19. Soit pour abrégér $\frac{2 E h}{M T^2 r} = e$, on aura par l'article 8. les équations suivantes,

$$\frac{d^2 y^1}{dt^2} = e (y^{11} - 2 y^1)$$

$$2 \frac{d^2 y^{11}}{dt^2} = e (y^{111} - 2 y^{11} + y^1)$$

$$\frac{d^2 y^{111}}{dt^2} = e (y^{1111} - 2 y^{111} + y^{11})$$

$$\frac{d^2 y^{1111}}{dt^2} = e (y^{11111} - 2 y^{1111} + y^{111})$$

&c.

$$\frac{d^2 y^{n-1}}{dt^2} = e (-2 y^{n-1} + y^{n-2}).$$

Pour intégrer toutes ces équations, on n'a qu'à recourir à la méthode, que Mr. D'Alembert nous a donné dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin. On supposera d'abord selon cette méthode $dy^1 = u^1 dt$, $dy^{11} = u^{11} dt$, $dy^{111} = u^{111} dt$, $dy^{1111} = u^{1111} dt$ &c. $dy^{n-1} = u^{n-1} dt$; ce qui changera les équations différentielles du second ordre dans les suivantes du premier

$$du^1 = e (y^{11} - 2 y^1) dt$$

$$du^{11} = e (y^{111} - 2 y^{11} + y^1) dt$$

$$du^{111} = e (y^{1111} - 2 y^{111} + y^{11}) dt$$

$$du^{1111} = e (y^{11111} - 2 y^{1111} + y^{111}) dt$$

&c.

$$du^{n-1} = e (-2 y^{n-1} + y^{n-2}) dt.$$

Il est à remarquer que les quantités u^1, u^2, u^3 &c. expriment les vitesses des corps qui parcourent les espaces y^1, y^2, y^3 &c. & qu'ainsi il est encore important de déterminer leurs valeurs.

Présentement il faut multiplier toutes ces équations, moins une à volonté, par des coefficients indéterminés, & les ajouter ensuite dans une même somme. Soient M^1, M^2, M^3 &c. les coefficients qui doivent multiplier les dernières équations, & N^1, N^2, N^3 &c. ceux qui multiplient les autres, & on aura $M^1 d u^1 + N^1 d y^1 + M^2 d u^2 + N^2 d y^2 + M^3 d u^3 + N^3 d y^3 + \&c. + M^{n-1} d u^{n-1} + N^{n-1} d y^{n-1} = (N^1 u^1 + e [M^2 - 2 M^1] y^1) d t + (N^2 u^2 + e [M^3 - 2 M^2 + M^1] y^2) d t + (N^3 u^3 + e [M^4 - 2 M^3 + M^2] y^3) d t + \&c. + (N^{n-1} u^{n-1} + e [-2 M^{n-1} + M^{n-2}] y^{n-1}) d t$, où l'on supposera pour plus de facilité le premier coefficient $M^1 = 1$.

Soit fait enforte que le premier membre de cette équation devienne un multiple exact de la différentielle du second; & supposant R un coefficient constant quelconque on trouvera par la comparaison des termes $R M^1 = N^1$; $R M^2 = N^2$; $R M^3 = N^3$ &c. $R M^{n-1} = N^{n-1}$; ensuite $R N^1 = e (M^2 - 2 M^1)$; $R N^2 = e (M^3 - 2 M^2 + M^1)$; $R N^3 = e (M^4 - 2 M^3 + M^2)$ &c. $R N^{n-1} = e (-2 M^{n-1} + M^{n-2})$; en substituant dans ces dernières équations les valeurs des N tirées des premières, il en résultera

$$R^2 M^1 = e (M^2 - 2 M^1)$$

$$R^2 M^2 = e (M^3 - 2 M^2 + M^1)$$

$$R^2 M^3 = e (M^4 - 2 M^3 + M^2)$$

&c.

$$R^2 M^{n-1} = e (-2 M^{n-1} + M^{n-2}).$$

Soit posé $\frac{R^2}{e} + 2 = K$, & en ordonnant les termes on parviendra aux équations

d

M^2

$$M^{11} = K M^1$$

$$M^{111} = K M^{11} - M^1$$

$$M^{1111} = K M^{111} - M^{11}$$

Éc.

d'où l'on doit tirer les valeurs d' M .

Pour y parvenir, je considère que ces équations étant toutes semblables, on peut les exprimer généralement par $M^\mu = K M^{\mu-1} - M^{\mu-2}$, posant pour μ tous les nombres entiers positifs depuis 0 jusqu'à $m-1$, laquelle équation contient évidemment une suite récurrente, dont l'échelle de relation est $K-1$. On aura donc pour la valeur de M^μ l'expression $Aa^\mu + Bb^\mu$, où A , & B sont des constantes, & a & b expriment les racines de l'équation du second degré $z^2 - Kz + 1 = 0$. De cette équation l'on tire $z = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K^2}{4} - 1\right)}$, ce qui donne $a = \frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K^2}{4} - 1\right)}$, $b = \frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K^2}{4} - 1\right)}$. Pour déterminer les constantes A & B , on fera la comparaison des deux premiers termes, savoir M^0 , & M^1 ; or M^0 est évidemment égal à zero, puisque l'équation qu'il devrait multiplier ne se trouve pas; & $M^1 = 1$ par supposition; l'on aura donc $A+B=0$; & $Aa+Bb=1$, d'où l'on déduit $B=-A$; $A(a-b) = 1$; $A = \frac{1}{a-b}$; & $B = -\frac{1}{a-b}$; ces valeurs étant substituées, il en résultera $M^\mu = \frac{a^\mu - b^\mu}{a-b}$.

Nous avons supposé que le nombre des équations fut $= m-1$ (art. 8.); il faut donc que le coefficient qui auroit multiplié l'équation suivante, soit de soi même égal à zero; savoir, il faut que $M^m = 0$, ou bien que

que $\frac{a^m - b^m}{a - b} = 0$. Voilà l'équation qui nous donnera la valeur de la quantité R qui étoit encore inconnue.

10. Pour résoudre cette équation j'ai recours au fameux théorème de Mr. Cotes, par lequel on trouve

$a^m - b^m = (a - b) \sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{\pi}{m} + b^2)} \times$
 $\sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{2\pi}{m} + b^2)} \times \sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{3\pi}{m} + b^2)}$
 $\times \&c.$, en prenant un nombre de facteurs égal à m , de sorte que le dernier devienne $\sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2)}$, où π dénote la circonférence du cercle, dont le rayon est 1. L'on a donc dans notre cas $\sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{\pi}{m} + b^2)} \times \sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{2\pi}{m} + b^2)} \times \sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{3\pi}{m} + b^2)} \times \&c. \times \sqrt{(a^2 - 2ab \cos. \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2)} = 0$, ce qui donne autant d'équations particulières, qu'il y a de facteurs, savoir en dégageant ces expressions des radicaux,

$$a^2 - 2ab \cos. \frac{\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \cos. \frac{2\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \cos. \frac{3\pi}{m} + b^2 = 0$$

&c.

$$a^2 - 2ab \cos. \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2 = 0.$$

Soit r un nombre quelconque entier depuis 0 jusqu'à $m - 1$, & toutes ces équations se réduiront à celle-ci

$$a^2 -$$

$a^2 - 2ab \cos. \frac{\pi}{m} + b^2 = 0$; si l'on substitue les valeurs trouvées de a & b (art. 19.), elle se change en $K^2 - 2 - 2 \cos. \frac{\pi}{m} = 0$, d'où l'on tire $K^2 = 2 (1 + \cos. \frac{\pi}{m})$, ce qui se réduit par les théorèmes de la multiplication des angles à $K^2 = 4 \cos. (\frac{\pi}{2m})^2$, d'où l'on a enfin $K = \pm 2 \cos. \frac{\pi}{2m}$.

21. Je remarque d'abord, que la variété des signes dans cette expression de K est inutile, parceque en faisant ν plus grand de $\frac{m}{2}$ la formule nous redonne les mêmes valeurs, que quand ν étoit plus petit, mais avec des signes contraires; l'on aura donc simplement $K = 2 \cos. \frac{\nu \pi}{2m}$, posant pour ν tous les nombres entiers positifs, depuis 0 jusqu'à $m - 1$. Par cette valeur générale de K , on trouvera celle de R par le moyen de l'équation $\frac{R^2}{e} + 2 = K$ (art. 18.); car on aura $R^2 = 2e (\cos. \frac{\nu \pi}{2m} - 1) = -4e (\sin. \frac{\nu \pi}{4m})^2$ par les théorèmes cités, d'où il résulte $R = \pm 2 \sqrt{e} \times \sin. \frac{\nu \pi}{4m} \times \sqrt{-1}$. On déduira encore de la valeur de K , celles des quantités a & b , comme il suit, $a = \cos. \frac{\nu \pi}{2m} + \sqrt{(\cos. \frac{\nu \pi}{2m})^2 - 1}$, $b = \cos. \frac{\nu \pi}{2m} - \sqrt{(\cos. \frac{\nu \pi}{2m})^2 - 1}$, savoir

$a =$

$$a = \cos. \frac{\sqrt{x}}{2m} + \sin. \frac{\sqrt{x}}{2m} \times \sqrt{-1}, \quad b = \cos. \frac{\sqrt{x}}{2m} -$$

$$\sin. \frac{\sqrt{x}}{2m} \times \sqrt{-1}, \text{ d'où l'on tire en substituant}$$

$$M^\mu = (\cos. \frac{\sqrt{x}}{2m} + \sin. \frac{\sqrt{x}}{2m} \times \sqrt{-1})^\mu : 2 \sin. \frac{\sqrt{x}}{2m} \times \sqrt{-1}$$

$$- (\cos. \frac{\sqrt{x}}{2m} - \sin. \frac{\sqrt{x}}{2m} \times \sqrt{-1})^\mu : 2 \sin. \frac{\sqrt{x}}{2m} \times \sqrt{-1}$$

laquelle expression se réduit encore, par les mêmes théorèmes ci-dessus, à $M^\mu = \sin. \frac{\mu \times \sqrt{x}}{2m} : \sin. \frac{\sqrt{x}}{2m}$.

22. Toutes ces opérations achevées, retournons à présent sur nos pas pour procéder à l'intégration de l'équation différentielle (art. 19.). Soit pour abrégier $M^1 u^1 + M^{11} u^{11} + M^{111} u^{111} + \&c. ; + M^{n-1} u^{n-1} + R (M^1 y^1 + M^{11} y^{11} + M^{111} y^{111} + \&c. + M^{n-1} y^{n-1}) = \zeta$, elle deviendra par ce moyen $d\zeta = R\zeta dt$, dont l'intégrale se trouve $\zeta = Fc^{Rt}$, où c est le nombre, dont le logarithme hyperbolique est 1, & F dénote une constante quelconque égale à valeur de ζ , qui répond au cas de $t = 0$; l'on aura, donc en restituant au lieu de ζ sa valeur première, $M^1 u^1 + M^{11} u^{11} + M^{111} u^{111} + \&c. + M^{n-1} u^{n-1} + R (M^1 y^1 + M^{11} y^{11} + M^{111} y^{111} + \&c. + M^{n-1} y^{n-1}) = Fc^{Rt}$, & puisque $u^1 dt = dy^1$; $u^{11} dt = dy^{11}$; $u^{111} dt = dy^{111}$; &c. si l'on multiplie toute l'équation par dt , il en résultera $M^1 dy^1 + M^{11} dy^{11} + M^{111} dy^{111} + \&c. + M^{n-1} dy^{n-1} + R (M^1 y^1 + M^{11} y^{11} + M^{111} y^{111} + \&c. + M^{n-1} y^{n-1}) dt = Fc^{Rt} dt$, & multipliant encore par c^{Rt} , & intégrant de nouveau $(M^1 y^1 + M^{11} y^{11} + M^{111} y^{111} + \&c. + M^{n-1} y^{n-1}) c^{Rt} = \frac{Fc^{2Rt}}{2R} + G$.

Pour déterminer les constantes F & G soient $V^1, V^{11}, V^{111} \&c., V^{n-1}$, & $Y^1, Y^{11}, Y^{111} \&c., Y^{n-1}$, les valeurs de $u^1, u^{11},$

u'' , u''' &c., u^{n-1} , & de y' , y'' , y''' &c., y^{n-1} au commencement du mouvement, lorsque $t = 0$; supposons de plus pour abrégé

$$M^1 Y^1 + M'' Y'' + M''' Y''' + \&c. + M^{n-1} Y^{n-1} = P.$$

$$M^1 V^1 + M'' V'' + M''' V''' + \&c. + M^{n-1} V^{n-1} = Q,$$

l'on aura d'abord $F = Q + RP$, ensuite posant $t = 0$

dans la dernière équation, $P = \frac{F}{2R} + G$, d'où l'on tire

$$G = \frac{2PR - F}{2R} = \frac{2PR - Q - PR}{2R} = \frac{PR - Q}{2R};$$

donc en divisant l'équation par e^{Rt} on trouvera finalement

$$\frac{M^1 y^1 + M'' y'' + M''' y''' + \&c. + M^{n-1} y^{n-1}}{2R} \times e^{Rt} + \frac{RP - Q}{2R} \times e^{-Rt} = P \times \frac{e^{Rt} + e^{-Rt}}{2}$$

$$+ \frac{Q}{R} \times \frac{e^{Rt} - e^{-Rt}}{2}, \text{ ce qui à cause de } R = \pm 2\sqrt{e}$$

$\times \sin. \frac{\sqrt{\pi}}{4m} \times \sqrt{-1}$ se réduit à

$$M^1 y^1 + M'' y'' + M''' y''' + \&c. + M^{n-1} y^{n-1} = P$$

$$\times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\sqrt{\pi}}{4m}) + Q \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\sqrt{\pi}}{4m})$$

$$\frac{2\sqrt{e} \times \sin. \frac{\sqrt{\pi}}{4m}}$$

soit qu'on prenne dans R le signe $+$, ou le signe $-$, comme nous l'enseignent les expressions exponentielles imaginaires des sinus & cosinus, si familières aujourd'hui aux Géomètres.

23. Cette équation toute simple qu'elle est suffit néanmoins pour déterminer les valeurs des inconnues y' , y'' , y''' &c. qui sont au nombre de $m - 1$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à réfléchir qu'elle contient le nombre indéterminé t , qui peut avoir les valeurs $1, 2, 3$ &c. jusqu'à $m - 1$, d'où il résultera autant d'équations. Tout se réduit donc à déterminer par le moyen de toutes ces équations

équations, les valeurs de chaque inconnue qu'elles contiennent, c'est ce que nous allons entreprendre.

Je commence par mettre au lieu des quantités M leurs valeurs trouvées (art. 21.), & effaçant le dénominateur commun $\sin. \frac{y\pi}{2m}$ qui s'évanouit naturellement de l'équation, je pose pour plus de commodité.

$$P' = Y^1 \sin. \frac{y\pi}{2m} + Y^{11} \sin. \frac{2y\pi}{2m} + Y^{111} \sin. \frac{3y\pi}{2m} + \&c. \\ + Y^{m-1} \sin. \frac{(m-1)y\pi}{2m}.$$

$$Q' = V^1 \sin. \frac{y\pi}{2m} + V^{11} \sin. \frac{2y\pi}{2m} + V^{111} \sin. \frac{3y\pi}{2m} + \&c. \\ + V^{m-1} \sin. \frac{(m-1)y\pi}{2m}.$$

Où les exposans de P , & Q dénoteront simplement les valeurs particulières de y , qui leur appartiennent.

Ainsi l'équation générale ci-dessus, deviendra

$$y^1 \sin. \frac{y\pi}{2m} + y^{11} \sin. \frac{2y\pi}{2m} + y^{111} \sin. \frac{3y\pi}{2m} + \&c. + \\ y^{m-1} \sin. \frac{(m-1)y\pi}{2m} = P' \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4m}) \\ + \frac{Q' \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4m})}{2\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4m}}$$

Soit encore pour abrégé $P' \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4m})$

$$+ \frac{Q' \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4m})}{2\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4m}} = S'$$

& posant successivement à la place de y tous les nombres naturels depuis 0, jusqu'à $m-1$, on aura les équations suivantes

$y^1 \sin.$

$$y^I \sin. \frac{\pi}{2m} + y^{II} \sin. \frac{2\pi}{2m} + y^{III} \sin. \frac{3\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{n-1} \sin. (m-1) \frac{\pi}{2m} = S^I$$

$$y^I \sin. \frac{2\pi}{2m} + y^{II} \sin. \frac{4\pi}{2m} + y^{III} \sin. \frac{6\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{n-1} \sin. 2(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{II}$$

$$y^I \sin. \frac{3\pi}{2m} + y^{II} \sin. \frac{6\pi}{2m} + y^{III} \sin. \frac{9\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{n-1} \sin. 3(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{III}$$

&c.

$$y^I \sin. (m-1) \frac{\pi}{2m} + y^{II} \sin. 2(m-1) \frac{\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{n-1} \sin. (m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{n-1}$$

dont le nombre sera $m-1$.

Il faudroit à présent, selon les règles ordinaires substituer les valeurs des inconnues y^I, y^{II}, y^{III} &c. d'une équation dans les autres successivement, pour arriver à une, qui ne contienne plus qu'une seule de ces variables; mais il est facile de voir, qu'en s'y prenant de cette façon on tomberoit dans des calculs impraticables à cause du nombre indéterminé d'équations & d'inconnues, il est donc nécessaire de suivre une autre route; voici celle qui m'a paru la plus propre.

24. Je multiplie d'abord chacune de ces équations par un des coefficients indéterminés $D^I, D^{II}, D^{III}, D^{IV}$ &c., en supposant que le premier D^I soit $= 1$; ensuite je les ajoute toutes ensemble, j'ai

$$y^I (D^I \sin. \frac{\pi}{2m} + D^{II} \sin. \frac{2\pi}{2m} + D^{III} \sin. \frac{3\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ D^{n-1} \sin. [m-1] \frac{\pi}{2m})$$

$$+ y^{II}$$

$$\begin{aligned}
& + y^{11} \left(D^1 \sin. \frac{2\pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{4\pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{6\pi}{2m} + \&c. \right. \\
& \quad \left. + D^{m-1} \sin. 2 [m-1] \frac{\pi}{2m} \right) \\
& + y^{111} \left(D^1 \sin. \frac{3\pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{6\pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{9\pi}{2m} + \&c. \right. \\
& \quad \left. + D^{m-1} \sin. 3 [m-1] \frac{\pi}{2m} \right) \\
& + \&c. \\
& + y^{m-1} \left(D^1 \sin. [m-1] \frac{\pi}{2m} + D^{11} \sin. 2 [m-1] \frac{\pi}{2m} \right. \\
& \quad \left. + \&c. + D^{m-1} \sin. [m-1]^2 \frac{\pi}{2m} \right) \\
& = D^1 S^1 + D^{11} S^{11} + D^{111} S^{111} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.
\end{aligned}$$

Qu'on veuille à présent la valeur d'un y quelconque, par exemple de y^μ , l'on fera évanouir les coefficients des autres y , & l'on obtiendra l'équation simple,

$$\begin{aligned}
& y^\mu \left(D^1 \sin. \frac{\mu\pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \right. \\
& \quad \left. + \&c. + D^{m-1} [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \right) \\
& = D^1 S^1 + D^{11} S^{11} + D^{111} S^{111} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.
\end{aligned}$$

L'on déterminera ensuite les valeurs des quantités D^{11} , D^{111} , D^{1111} &c., qui sont en nombre de $m-2$ par les équations particulières qu'on aura en supposant égaux à zero les coefficients de tous les autres y ; l'on aura par là l'équation générale.

$$\begin{aligned}
& D^1 \sin. \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{2\lambda\pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. \\
& + D^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\lambda\pi}{2m} = 0,
\end{aligned}$$

laquelle devra être vraie quelque nombre positif entier qu'on pose au lieu de λ depuis 0, jusqu'à $m-1$, excepté μ .

25. Pour tirer de cette équation les valeurs des quantités D , je remarque d'abord, que tout sinus d'un angle multiple se réduit à une suite de puissances entières, & positives du cosinus de l'angle simple, dont le plus grand exposant est égal au nombre qui en dénote le multiple diminué de l'unité, toute la suite étant encore multipliée par le sinus de l'angle simple. Donc si l'on développe de cette façon tous les sinus des angles multiples de $\frac{\lambda \pi}{2m}$ & qu'on divise ensuite l'équation par $\sin. \frac{\lambda \pi}{2m}$, on parviendra à une autre équation, qui ne contiendra que des puissances de $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m}$, & dont le degré sera $= m - 1$; de-là il suit qu'en regardant $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m}$, comme l'inconnue de cette équation, ses racines devront être $\cos. \frac{\pi}{2m}$, $\cos. \frac{2\pi}{2m}$, $\cos. \frac{3\pi}{2m}$ &c. jusqu'à $\cos. (m - 1) \frac{\pi}{2m}$, excepté $\cos. \frac{\mu \pi}{2m}$. Par conséquent toute l'équation ne pourra être que le produit continuuel des facteurs $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\pi}{2m}$; $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{2\pi}{2m}$; $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{3\pi}{2m}$, &c. dont le dernier sera $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. (m - 1) \frac{\pi}{2m}$, en omettant toute fois le facteur intermédiaire $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\mu \pi}{2m}$; c'est pourquoi si l'on nomme L une constante quelconque, l'on aura

$D = \sin.$

$$\frac{D^1 \sin. \frac{\lambda \pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{2 \lambda \pi}{2m} + \&c. + D^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\lambda \pi}{2m}}{\sin. \frac{\lambda \pi}{2m}}$$

$$= L \left(\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\pi}{2m} \right) \left(\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{2 \pi}{2m} \right) \\ \left(\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{3 \pi}{2m} \right) \dots \left(\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. [m-1] \frac{\pi}{2m} \right)$$

Le théorème déjà cité de Mr. Cotes nous donne l'équation

$$p^{2m} - q^{2m} = (p^2 - q^2) (p^2 - 2pq \cos. \frac{\pi}{2m} + q^2) \\ (p^2 - 2pq \cos. \frac{2 \pi}{2m} + q^2) (p^2 - 2pq \cos. \frac{3 \pi}{2m} + q^2) \\ \dots (p^2 - 2pq \cos. [m-1] \frac{\pi}{2m} + q^2), \text{ en}$$

n'omettant aucun des facteurs intermédiaires; que l'on compare donc ces facteurs avec ceux de l'équation précédente, en faisant $p^2 + q^2 = \cos. \frac{\lambda \pi}{2m}$, & $2pq = 1$, & l'on aura

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 + \cos. \frac{\lambda \pi}{2m} = 2 \left(\cos. \frac{\lambda \pi}{4m} \right)^2 \\ p^2 - 2pq + q^2 = \cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - 1 = -2 \left(\sin. \frac{\lambda \pi}{4m} \right)^2, \\ \text{d'où en extrayant les racines, il résulte } p+q = \pm \sqrt{2} \\ \times \cos. \frac{\lambda \pi}{2m}, p-q = \pm \sqrt{2} \times \sin. \frac{\lambda \pi}{2m} \times \sqrt{-1}, \& \text{ enfin}$$

$$p = \pm \frac{\cos. \frac{\lambda \pi}{4m} + \sin. \frac{\lambda \pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \\ q = \pm \frac{\cos. \frac{\lambda \pi}{4m} - \sin. \frac{\lambda \pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

Par

Par conséquent l'on aura

$$p^2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{4m} + \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{4m} \times \sqrt{-1} \right)^2$$

$$= \frac{\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{2m} + \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$q^2 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{4m} - \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{4m} \times \sqrt{-1} \right)^2$$

$$= \frac{\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{2m} - \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$p^2 - q^2 = \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2m} \times \sqrt{-1}; \text{ de même}$$

$$p^{2m} = \frac{1}{2^m} \left(\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{4m} + \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{4m} \times \sqrt{-1} \right)^{2m}$$

$$= \frac{\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{2} + \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$q^{2m} = \frac{1}{2^m} \left(\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{4m} - \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{4m} \times \sqrt{-1} \right)^{2m}$$

$$= \frac{\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{2} - \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$p^{2m} - q^{2m} = \frac{\operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^{m-1}}$$

Toutes ces valeurs étant ainsi trouvées, l'on divisera

$p^{2m} - q^{2m}$ par $(p^2 - q^2)(p^2 - 2pq \operatorname{cof.} \frac{\mu \pi}{2m} + q^2)$ ce qui

donne $\frac{\operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2}}{2^{m-1} \operatorname{fin.} \frac{\lambda \pi}{2m} \times (\operatorname{cof.} \frac{\lambda \pi}{2m} - \operatorname{cof.} \frac{\mu \pi}{2m})}$ laquelle

expression multipliée par L devra être égale au premier membre

membre de l'équation trouvée dans cet article; dont en ôtant de part & d'autre le diviseur commun $\sin. \frac{\lambda \pi}{2m}$ on trouvera

$$D^1 \sin. \frac{\lambda \pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{2\lambda \pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\lambda \pi}{2m} + \&c. \\ + D^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\lambda \pi}{2m} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. \frac{\lambda \pi}{2}}{\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\mu \pi}{2m}}$$

équation qui doit être identique.

Si donc l'on multiplie toute l'équation par $\cos. \frac{\lambda \pi}{2m}$ — $\cos. \frac{\mu \pi}{2m}$, & qu'après avoir réduit les produits des sinus par les cosinus en simples sinus, on fasse la comparaison des termes, on trouvera les valeurs cherchées des quantités indéterminées D . Pour faire cette opération plus aisément commençons par multiplier la suite qui forme le premier membre de l'équation rapportée par $\pm \cos. \frac{\lambda \pi}{2m}$; en développant chaque produit particulier, & en ordonnant les termes, il viendra

$$D^{11} \sin. \frac{\lambda \pi}{2m} + (D^{111} + D^1) \sin. \frac{2\lambda \pi}{2m} + (D^{1111} + D^{11}) \\ \sin. \frac{3\lambda \pi}{2m} + \&c. + D^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\lambda \pi}{2m} + \\ D^{m-1} \sin. \frac{\lambda \pi}{2m}.$$

Ensuite si l'on multiplie la même serie par $\pm \cos. \frac{\mu \pi}{2m}$, & qu'on retranche ce dernier produit de l'autre, on parviendra à l'équation

(D^{11}

$$\begin{aligned}
& (D^{11} - 2 D^1 \cos. \frac{\mu \pi}{2 m}) \sin. \frac{\lambda \pi}{2 m} + (D^{111} - 2 D^{11} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} \\
& + D^1) \sin. \frac{2 \lambda \pi}{2 m} + (D^{1111} - 2 D^{111} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} \\
& + D^{11}) \sin. \frac{3 \lambda \pi}{2 m} + \&c. + (-2 D^{m-1} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} \\
& + D^{m-2}) \sin. [m-1] \frac{\lambda \pi}{2 m} + D^{m-1} \sin. \frac{\lambda \pi}{2} \\
& = \frac{L}{2^{m-2}} \times \sin. \frac{\lambda \pi}{2}.
\end{aligned}$$

L'on aura donc

$$D^{11} - 2 D^1 \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} = 0$$

$$D^{111} - 2 D^{11} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} + D^1 = 0$$

$$D^{1111} - 2 D^{111} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} + D^{11} = 0$$

&c.

$$-2 D^{m-1} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} + D^{m-2} = 0$$

$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

d'où l'on doit tirer les valeurs des quantités D .

Il est visible au premier aspect, que les quantités D constituent une progression recurrenre, dans laquelle en commençant par le bas, il est

$$D^m = 0$$

$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

$$D^{m-2} = 2 D^{m-1} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} - D^m$$

$$D^{m-3} = 2 D^{m-2} \cos. \frac{\mu \pi}{2 m} - D^{m-1}$$

&c.

Le

Le terme général de cette suite se trouvera comme ci-dessus (art. 19.) exprimé de cette façon $D^{m-n} = Aa^n + Bb^n$, où a & b sont les racines de l'équation du second degré $x^2 - 2\zeta \cos \frac{\mu\pi}{2m} + 1 = 0$. Pour déterminer les constantes A & B qu'on pose $n = 0$, & $n = 1$, l'on aura $A + B = 0$, & $Aa + Bb = \frac{L}{2^{m-1}}$, ce qui

donne $B = -A$, $A = \frac{L}{2^{m-1}(a-b)}$, $B = -\frac{L}{2^{m-1}(a-b)}$,

& par conséquent $D^{m-n} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{a^n - b^n}{a - b}$. Or si l'on substitue au lieu de a & b les racines de l'équation proposée, il en résultera par un procédé semblable à celui

de l'article 25. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{\sin. \frac{n\mu\pi}{2m}}{\sin. \frac{\mu\pi}{2m}}$, d'où D^{m-n}

$= \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. \frac{n\mu\pi}{2m}}{\sin. \frac{\mu\pi}{2m}}$; & posant pour plus de commodité

$m - n = s$, $D^s = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. (m-s) \frac{\mu\pi}{2m}}{\sin. \frac{\mu\pi}{2m}}$; mais

$\sin. (m-s) \frac{\mu\pi}{2m} = \sin. (\frac{\mu\pi}{2} - \frac{s\mu\pi}{2m}) = \pm \sin. \frac{s\mu\pi}{2m}$; où le signe $+$ doit être pris toutes les fois que μ est un nombre impair, & le signe $-$ quand μ est pair; on aura

donc enfin $D^s = \pm \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. \frac{s\mu\pi}{2m}}{\sin. \frac{\mu\pi}{2m}}$, & telle est la

f

valeur

valeur générale de D , d'où dépend la résolution des équations de l'article 23.

26. Reprenons maintenant l'équation de l'article 24., & substituant dans son second membre les valeurs trouvées des quantités D , on la réduira d'abord à

$$y^m \left(D^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} + \&c \right. \\ \left. + D^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu \pi}{2m} \right) = \pm \frac{L}{2^{m-2} \sin. \frac{\mu \pi}{2m}}$$

$$(S^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m} + S^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} + S^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} + \&c. \\ + S^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu \pi}{2m}). \text{ A l'égard du pre-}$$

mier membre, on remarquera que $D^1 \sin. \frac{\lambda \pi}{2m} + D^{11}$
 $\sin. \frac{2\lambda \pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\lambda \pi}{2m} + \&c. + D^{m-1} \sin. (m-1)$

$$\sin. \frac{\lambda \pi}{2} \\ \frac{\lambda \pi}{2m} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. \frac{\lambda \pi}{2}}{\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\mu \pi}{2m}} \quad (\text{art. 25.})$$

Donc si l'on suppose $\lambda = \mu$ l'on aura $D^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m}$
 $+ D^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} + \&c. + D^{m-1}$

$$\sin. (m-1) \frac{\mu \pi}{2m} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. \frac{\mu \pi}{2}}{\cos. \frac{\mu \pi}{2m} - \cos. \frac{\mu \pi}{2m}};$$

mais puisque μ est un nombre entier, on a $\sin. \frac{\mu \pi}{2} = 0$,
 donc le dernier membre de l'équation se réduit à

L

$\frac{L}{2^n - 1} \times \frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur soit supposé λ variable, & différenciant à part le numérateur, & le dénominateur de la formule générale

$$\frac{\sin. \frac{\lambda \pi}{2}}{\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\mu \pi}{2m}} \text{ on trouvera } \frac{m \cos. \frac{\lambda \pi}{2}}{- \sin. \frac{\lambda \pi}{2m}}, \text{ or } \mu$$

étant un nombre entier, $\cos. \frac{\mu \pi}{2}$ est $= \pm 1$, le signe supérieur répond à μ pair, l'inférieur à μ impair; l'on aura donc $D^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m} + D^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} + D^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m}$

$$+ \&c. + D^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\mu \pi}{2m} = \pm \frac{L}{2^n - 1}$$

$\times \frac{m}{\sin. \frac{\mu \pi}{2m}}$, & ainsi l'équation précédente deviendra

$$\pm y^\mu \times \frac{mL}{2^n - 1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m}} = \pm \frac{L}{2^n - 1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m}} (S^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m}$$

$$+ S^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} + S^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} + \&c. + S^{m-1}$$

$$\sin. [m-1] \frac{\mu \pi}{2m}), \text{ d'où l'on tire}$$

$$y^\mu = \frac{2}{m} \times (S^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m} + S^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} + S^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m}$$

$$+ \&c. + S^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu \pi}{2m}).$$

Voilà donc quelle doit être l'expression générale des y qui dénotent les espaces parcourus par chacun des corps dans un tems quelconque t .

27. Pour connoître plus clairement la nature de l'équation trouvée, on y substituera les valeurs des quantités

f^2

$S^1,$

⁴⁴
 S^1, S^{11}, S^{111} de l'art. 23. ce qui donnera finalement la formule

$$\begin{aligned}
 y^\mu = & \frac{2}{m} \times P^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\pi}{4m}) \\
 & + \frac{2}{m} \times P^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{2\pi}{4m}) \\
 & + \frac{2}{m} \times P^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{3\pi}{4m}) \\
 & + \&c. \\
 & + \frac{2}{m} P^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu \pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m}) \\
 & + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^1 \sin. \frac{\mu \pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\pi}{4m})}{\sin. \frac{\pi}{4m}} \\
 & + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{11} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{2\pi}{4m})}{\sin. \frac{2\pi}{4m}} \\
 & + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{111} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{3\pi}{4m})}{\sin. \frac{3\pi}{4m}} \\
 & + \&c. \\
 & + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu \pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m})}{\sin. [m-1] \frac{\pi}{4m}}
 \end{aligned}$$

les quantités P^1, P^{11}, P^{111} &c. & Q^1, Q^{11}, Q^{111} dépendent de la première situation des corps, & de leurs premières vitesses, selon les suppositions de l'article 22.

De

De cette expression de y^μ on tirera aisément celle de u^μ qui exprime la vitesse, avec laquelle l'espace y^μ est parcouru; car puisque $u^\mu = \frac{dy^\mu}{dt}$, on n'aura qu'à différentier l'équation donnée en faisant t variable; & on trouvera l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
 u^\mu = & -\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^1 \sin. \frac{\pi}{4m} \times \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\pi}{4m}) \\
 & -\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{11} \sin. \frac{2\pi}{4m} \times \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{2\pi}{4m}) \\
 & -\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{111} \sin. \frac{3\pi}{4m} \times \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{3\pi}{4m}) \\
 & - \&c. \\
 & -\frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m} \times \sin. [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \\
 & \quad \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m}) \\
 & +\frac{2}{m} \times Q^1 \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\pi}{4m}) \\
 & +\frac{2}{m} \times Q^{11} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{2\pi}{4m}) \\
 & +\frac{2}{m} \times Q^{111} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{3\pi}{4m}) \\
 & + \&c. \\
 & +\frac{2}{m} \times Q^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m}).
 \end{aligned}$$

Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est fini.

28. NOUS regarderons les quantités y , comme des ordonnées à l'axe AB (Fig. 7.), qui est supposé divisé en un nombre m de parties égales à r ; & les exposans de ces variables exprimeront le quantième de la place qu'elles occupent sur l'axe, en comptant depuis l'extrémité A . Ainsi le polygone qu'on pourra faire passer par les extrémités de toutes ces ordonnées sera la figure de la corde tendue, & chargée à chaque angle d'un poid M , & il sera en même tems le lieu géométrique des excursions des corps élastiques M , disposés dans la même ligne droite AB , selon ce qu'on a démontré dans les chapitres précédens.

Il est d'abord évident que la formule qui donne la valeur de y^u est composée d'une suite de formules telles que

$$\begin{aligned}
 & A \text{ fin. } \frac{s \mu \pi}{2m} \times \text{cof. } (2 \sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{s \pi}{4m}) \\
 & B \text{ fin. } \frac{s \mu \pi}{2m} \times \text{fin. } (2 \sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{s \pi}{4m}) \\
 & + \frac{\text{fin. } \frac{s \pi}{4m}}{\text{fin. } \frac{s \pi}{4m}}
 \end{aligned}$$

que je dénoterai dorénavant par ϕ^u ; A & B sont des constantes qui dépendent du premier état du système des corps, & s exprime un nombre quelconque dans la suite naturelle 1, 2, 3, $m - 1$; ainsi si l'on construit un nombre $m - 1$ de polygones qui répondent tous à cette expression générale en y supposant s successivement égal à 1, 2, 3, &c. jusqu'à $m - 1$, & qu'on prenne

prenne le premier pour axe du second, le second pour axe du troisième, & ainsi de suite, le dernier qui sera formé sur tous les autres contiendra les vraies valeurs de toutes les variables y ; d'où l'on voit que les mouvemens rectilignes des corps qui parcourent les espaces y^1 , y^2 , y^3 , &c. pourront être censés composés d'autant de mouvemens particuliers qu'il y a de corps mobiles.

Examinons de plus près la composition de ces mouvemens.

19. Soit posé $\phi^\mu = 0$, l'on aura les deux équations
 $\text{fin. } \frac{s\mu\pi}{2m} = 0$, & $A \cos. (2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{s\pi}{4m}) +$

$$\frac{B \text{ fin. } (2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{s\pi}{4m})}{\text{fin. } \frac{s\pi}{4m}} = 0, \text{ qui détermineront les}$$

points, où chacun des polygones simples pourra couper son propre axe. Il est visible que la première aura lieu toutes les fois que $\frac{s\mu}{m}$ sera égal à zero, ou à un nombre entier quelconque; soit donc k un tel nombre, on aura $\frac{s\mu}{m} = k$, & $\mu = \frac{km}{s}$, laquelle valeur de μ satisfera toujours quel que soit le tems t .

Soit $s = 1$, l'on aura $\mu = km, = 0, = m, = 2m$, &c. d'où il s'ensuit que le polygone ne pourra rencontrer l'axe AB que dans ses deux extrémités A & B , il fera donc tout au dessus, ou au dessous de lui comme l'on voit (Fig. 7.).

Soit $s = 2$ l'on aura $\mu = \frac{km}{2} = 0, = \frac{m}{2} = m$; &c. le polygone coupera donc l'axe au milieu C , & il aura par conséquent une moitié au dessus, & l'autre au dessous, comme dans la (Fig. 8.)

Soit

Soit $s = 3$, l'on aura $\mu = \frac{km}{3}$, $= 0$, $= \frac{m}{3}$, $=$

$\frac{2}{m}$, $= m$ &c. Et le poligone rencontrera l'axe deux fois, & le divifera en trois parties égales, il aura donc une figure femblable à celle qu'on voit (Fig. 9.), & ainfi de fuite. D'où l'on conclura que les poligones auront toujours autant de ventres d'égale longueur qu'il y a d'unités dans le nombre s .

30. Prétentement fi l'on s'attache à la feconde équation on trouvera en la réduifant, fin. $(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{s\pi}{4m})$

$$= \frac{A \text{ fin. } \frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{(B^2 + A^2 [\text{fin. } \frac{s\pi}{4m}]^2)}} \quad \text{Pofons pour abrégér}$$

$$\frac{A \text{ fin. } \frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{(B^2 + A^2 [\text{fin. } \frac{s\pi}{4m}]^2)}} = Z, \text{ on en tirera } 2t\sqrt{e} \text{ fin. } \frac{s\pi}{4m}$$

$$= \text{Arc. (fin. } Z), \text{ \& } t = \frac{\text{Arc. (fin. } Z)}{2\sqrt{e} \text{ fin. } \frac{s\pi}{4m}}. \text{ Equation qui}$$

pourra être vraie quel que foit le nombre μ , parceque il n'y entre point; d'où il fuit que les poligones ne peuvent jamais couper leurs axes en d'autres points, que dans ceux que nous avons déterminé ci-deffus, à moins qu'ils ne fe confondent entièrement avec les axes mêmes, ce qui arrivera toutes les fois, que t aura la valeur affignée. Or comme il y a une infinité d'Arcs qui répondent tous aux mêmes finus, la quantité t pourra auffi recevoir une infinité de valeurs. Pour les trouver foit θ le moindre Arc qui répond au finus Z , & k un nombre quelconque entier, on aura généralement

$$t =$$

$$t = \frac{k\pi + \theta}{2\sqrt{c} \sin. \frac{s\pi}{4m}}, \text{ où encore } t = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{2} - \theta}{2\sqrt{c} \sin. \frac{s\pi}{4m}}$$

il résulte donc de cette formule qu'après que le polygone se sera pour la première fois étendu en ligne droite, il retournera dans cet état à chaque intervalle de tems exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{c} \sin. \frac{s\pi}{4m}}$, qu'on devra par conséquent re-

garder comme le tems d'une oscillation entière, d'où l'on voit que ces tems, toutes choses d'ailleurs égales, seront en raison inverse de $\sin. \frac{s\pi}{4m}$, donc le tems d'une vibration pour la première figure sera à celui de la seconde, de la troisième, &c. comme $\sin. \frac{\pi}{2m}$ à $\sin. \frac{\pi}{4m}$; comme $\sin. \frac{3\pi}{4m}$ à $\sin. \frac{\pi}{4m}$, &c ainsi de suite.

31. Les loix des mouvemens de chacun des polygones simples, nous feront aisément connoître par leur combinaison ceux du polygone composé. Nous venons de voir que le premier polygone qui a pour axe la droite *AB* n'a qu'un seul ventre, & que ses vibrations s'achèvent dans un tems proportionnel à $\frac{1}{\sin. \frac{\pi}{4m}}$; que le second qui

a pour axe celui-ci, contient deux ventres, & qu'il emploie dans chaque vibration un tems proportionnel à $\frac{1}{\sin. \frac{\pi}{2m}}$

& ainsi de suite. Il s'ensuit de-là, que, puisque ces tems sont presque toujours incommensurables entr'eux, il arrivera très-rarement que le polygone composé s'étende
g tout

tout en ligne droite ; c'est pourquoi les vibrations paroîtront tout-à-fait irrégulières, quoiqu'elles soient composées d'un nombre de vibrations simples, régulières & isocrones en elles mêmes.

32. Cette théorie générale que nous avons immédiatement déduit de nos formules, appliquée aux mouvemens des cordes vibrantes est la même que Mr. Daniel Bernoulli a inventé sur ce sujet, comme on l'a exposé dans le Chapitre III. ; si donc ce grand Homme a pû croire qu'une solution purement analitique étoit en elle même incapable de faire connoître la véritable nature de ces mouvemens, ces recherches pourront ouvrir une route nouvelle pour faire des applications de calcul à des sujets qui n'en paroissent pas susceptibles, & servir à perfectionner l'Analise. Au reste on ne peut trop estimer la sagacité, & la pénétration de ce célèbre Géomètre, qui par un pur examen sintétique de la question proposée est parvenu à réduire à des loix simples & générales des mouvemens qui semblent s'y refuser par leur nature.

33. Avant que d'abandonner cette matière, examinons encore les cas, où les vibrations composées peuvent devenir simples & régulières.

Il est visible que ceci arrivera toutes les fois que $y^{\mu} = \phi^{\mu}$, savoir quand tous les termes exprimés généralement par ϕ^{μ} se réduiront à un seul quel qu'il soit. Soit s le quantiéme du terme restant, on aura par l'art. 27.

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times P^s \sin. \frac{s \mu \pi}{2m} \times \cos. (2t \sqrt{e} \times \sin. \frac{s \pi}{4m}) \\ + \frac{1}{m \sqrt{e}} \times \frac{Q^s \sin. \frac{s \mu \pi}{2m} \times \sin. (2t \sqrt{e} \times \sin. \frac{s \pi}{4m})}{\sin. \frac{s \pi}{4m}}$$

ensuite il faudra que $P^1 = 0$; $P^{11} = 0$; $P^{111} = 0$ &c. jusqu'à P^{m-1} , excepté P^s ; & de même $Q^1 = 0$; $Q^{11} = 0$; $Q^{111} = 0$ &c. jusqu'à Q^{m-1} , excepté Q^s ; d'où l'on

51

l'on tirera les conditions requises dans le premier état du système, afin que les vibrations des corps suivent les loix proposées. On aura donc ces deux équations

$$Y^1 \sin. \frac{\sigma \pi}{2m} + Y^{11} \sin. \frac{2 \sigma \pi}{2m} + Y^{111} \sin. \frac{3 \sigma \pi}{2m} + \&c. \\ + Y^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\sigma \pi}{2m} = 0$$

$$V^1 \sin. \frac{\sigma \pi}{2m} + V^{11} \sin. \frac{2 \sigma \pi}{2m} + V^{111} \sin. \frac{3 \sigma \pi}{2m} + \&c. \\ + V^{m-1} \sin. (m-1) \frac{\sigma \pi}{2m} = 0$$

qui devront se vérifier quelque nombre qu'on pose au lieu de σ depuis 1, jusqu'à $m-1$, excepté s .

Que l'on compare maintenant cette équation avec celle de l'art. 24., il est évident qu'en substituant σ au lieu de λ , & s , au lieu de μ , les quantités Y & V seront déterminées de la même manière que les quantités D ; c'est pourquoi l'on trouvera généralement

$$Y^s = \pm \frac{L}{2^{s-1}} \times \frac{\sin. \frac{ys\pi}{2m}}{\sin. \frac{s\pi}{2m}}, \& V^s = \pm \frac{L^1}{2^{s-1}} \times \frac{\sin. \frac{ys\pi}{2m}}{\sin. \frac{s\pi}{2m}}$$

où L , & L^1 sont deux constantes arbitraires, qu'on pourra déterminer par la valeur de deux termes quelconques de la suite des Y & des V . Supposant donc que les deux premières quantités Y & V soient données, l'on aura

$$\frac{L}{2^{s-1}} = Y, \& \frac{L^1}{2^{s-1}} = V; \text{ d'où l'on tire enfin}$$

$$Y^s = \pm Y \frac{\sin. \frac{ys\pi}{2m}}{\sin. \frac{s\pi}{2m}}, V^s = \pm V \frac{\sin. \frac{ys\pi}{2m}}{\sin. \frac{s\pi}{2m}} \text{ le signe}$$

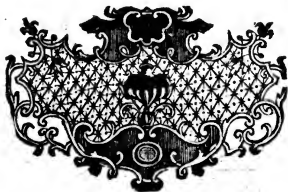
supérieur répond à s impair, & l'inférieur à s pair.

Telles sont les valeurs qu'il faudra donner d'abord aux vitesses, & aux éloignemens des corps, afin que le système souffre des vibrations simples & régulières, suivant les loix de l'espèce s^m qui contient s ventres, & dont le tems d'une oscillation entière est toujours exprimé par

$\frac{\pi}{2\sqrt{e}} \sin. \frac{s\pi}{4m}$. L'on peut prendre dans ces formules le

nombre s égal à 1, à 2, à 3, &c. jusqu'à $m - 1$, d'où il s'ensuit qu'on peut donner à tout le système autant d'arrangemens différens, qui néanmoins seront tous propres à produire tant le synchronisme, que l'isocronisme des corps.

Ce problème a été déjà résolu par quelques Géomètres dans le cas d'un nombre de corps déterminé, mais la route qu'ils ont pris les a toujours conduit à des équations d'un degré égal au nombre des corps mobiles, dont il falloit par conséquent chercher les racines dans chaque cas particulier; je ne crois pas qu'on ait jamais donné pour cela une formule générale, telle que nous venons de la trouver.



Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est infini.

34. **L**A théorie du mélange des vibrations simples & régulières que nous venons d'établir découle de la forme même des équations trouvées. Or cette forme subsistera toujours, tandis que le nombre des corps mobiles sera fini, savoir quand m sera un nombre fini, mais sera-t-il aussi vrai que la supposition de m infini, ne défigure pas, pour ainsi dire, l'équation, & n'en altère pas entièrement la forme? c'est ce que nous allons examiner dans ce chapitre.

Il est évident qu'en faisant $m = \infty$ les angles $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ &c. deviendront infiniment petits, & que leurs sinus ne différeront pas des Arcs qui leur appartiennent; ainsi l'on aura, $\sin. \frac{\pi}{4m} = \frac{\pi}{4m}$; $\sin. \frac{2\pi}{4m} = \frac{2\pi}{4m}$; $\sin. \frac{3\pi}{4m} = \frac{3\pi}{4m}$ &c. donc la formule qui donne la valeur de y^μ se changera en celle-ci.

$$\begin{aligned}
 y^\mu &= \frac{2}{m} \times P^I \sin. \frac{\mu \pi}{2m} \times \cos. \frac{\pi t \sqrt{c}}{2m} \\
 &+ \frac{2}{m} \times P^{II} \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} \times \cos. \frac{2\pi t \sqrt{c}}{2m} \\
 &+ \frac{2}{m} \times P^{III} \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} \times \cos. \frac{3\pi t \sqrt{c}}{2m} \\
 &+ \&c. \text{ à l'infini} \\
 &+ \frac{4}{\pi \sqrt{c}} \times Q^I \sin. \frac{\mu \pi}{2m} \times \sin. \frac{\pi t \sqrt{c}}{2m}
 \end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{2\pi\sqrt{e}} \times Q^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{4}{3\pi\sqrt{e}} \times Q^{III} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \&c. \text{ à l'infini}
\end{aligned}$$

l'on aura de même, dans ce cas

$$\begin{aligned}
u^{\mu} = & - \frac{\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^I \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& - \frac{2\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& - \frac{3\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{III} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& - \&c. \text{ à l'infini} \\
& + \frac{2}{m} \times Q^I \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \cos. \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \cos. \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{III} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \cos. \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \&c. \text{ à l'infini}
\end{aligned}$$

35. Soient infiniment petites les masses M des corps, en sorte que leur somme soit finie, & $= S$, on aura $m = \frac{S}{M}$, de plus si a exprime la longueur de l'axe AB , on aura encore $m = \frac{a}{r}$, d'où $\frac{a}{r} = \frac{S}{M}$, & $r = \frac{aM}{S}$, donc la quantité e qui est $= \frac{2Eh}{MT^2r}$ (art. 19.) deviendra $= \frac{2EhS}{T^2M^2a}$, & par conséquent $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{TMs} \sqrt{\left(\frac{2EhS}{a}\right)}$;

ou

ou bien puisque $m \times M = S$, il sera $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{T} \sqrt{\left(\frac{2Eh}{aS}\right)}$
 qui est une quantité finie, & toute connue, qu'on sup-
 posera pour abrégé $= \frac{H}{T}$.

36. Supposons que le rapport des nombres m , & μ
 soit celui de a : x ; x exprimera l'abscisse dans l'axe AB ,
 à laquelle repondra l'ordonnée y^μ , de même que la vi-
 tesse u^μ , l'on aura donc $\frac{\mu}{m} = \frac{x}{a}$; & faisant de plus dx

constante, & égale à r , on aura $\frac{a}{dx} = m$; toutes ces
 valeurs substituées dans les formules ci-dessus l'on obtien-
 dra généralement

$$y = \frac{2dx}{a} \times P^I \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \cos. \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+ \frac{2dx}{a} \times P^{II} \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \cos. \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+ \frac{2dx}{a} \times P^{III} \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \cos. \frac{3\pi Ht}{2T}$$

+ &c. à l'infini

$$+ \frac{4Tdx}{\pi Ha} \times Q^I \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+ \frac{4Tdx}{2\pi Ha} \times Q^{II} \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \sin. \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+ \frac{4Tdx}{3\pi Ha} \times Q^{III} \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \sin. \frac{3\pi Ht}{2T}$$

+ &c. à l'infini

& de même

$$u = - \frac{\pi Hdx}{aT} \times P^I \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$- 2\pi Hdx$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\pi H dx}{aT} \times P^{II} \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \sin. \frac{2\pi Ht}{2T} \\
& - \frac{3\pi H dx}{aT} \times P^{III} \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \sin. \frac{3\pi Ht}{2T}
\end{aligned}$$

— &c. à l'infini

$$\begin{aligned}
& + \frac{2dx}{a} \times Q^I \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \cos. \frac{\pi Ht}{2T} \\
& + \frac{2dx}{a} \times Q^{II} \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \cos. \frac{2\pi Ht}{2T} \\
& + \frac{2dx}{a} \times Q^{III} \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \cos. \frac{3\pi Ht}{2T}
\end{aligned}$$

+ &c. à l'infini.

37. Présentement il faut substituer dans ces formules les expressions des quantités P^I , P^{II} , P^{III} &c. Q^I , Q^{II} , Q^{III} &c. d'où en ordonnant les termes par les quantités connues Y^I , Y^{II} , Y^{III} &c. V^I , V^{II} , V^{III} &c. on trouvera autant de suites infinies, dont chacune sera multipliée par une de ces quantités.

Soit X : a la raison générale des exposans des Y & des V au nombre m , X dénotera la partie de l'axe qui leur est correspondante dans le premier état du système; donc si l'on emploie le signe intégral \int pour exprimer la somme de toutes ces suites, on aura

$$\begin{aligned}
y = \frac{2}{a} \int dx Y \left(\sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \cos. \frac{\pi Ht}{2T} \right. \\
+ \sin. \frac{2\pi X}{2a} \times \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \cos. \frac{2\pi Ht}{2T} \\
+ \sin. \frac{3\pi X}{2a} \times \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \cos. \frac{3\pi Ht}{2T} \\
\left. + \&c. \text{ à l'infini} \right)
\end{aligned}$$

+ 4 T

$$\begin{aligned}
& + \frac{4T}{\pi H a} \int dx V \left(\sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi H t}{2T} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \sin. \frac{2\pi X}{2a} \times \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \sin. \frac{2\pi H t}{2T} \\
& \quad + \frac{1}{3} \sin. \frac{3\pi X}{2a} \times \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \sin. \frac{3\pi H t}{2T} \\
& \quad \left. + \&c. \text{ à l'infini} \right)
\end{aligned}$$

& de même pour u

$$\begin{aligned}
u = & - \frac{\pi H}{a T} \int dx Y \left(\sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi H t}{2T} \right. \\
& \quad + 2 \sin. \frac{2\pi X}{2a} \times \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \sin. \frac{2\pi H t}{2T} \\
& \quad + 3 \sin. \frac{3\pi X}{2a} \times \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \sin. \frac{3\pi H t}{2T} \\
& \quad \left. + \&c. \text{ à l'infini} \right) \\
& + \frac{2}{a} \int dx V \left(\sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi x}{2a} \times \sin. \frac{\pi H t}{2T} \right. \\
& \quad + \sin. \frac{2\pi X}{2a} \times \sin. \frac{2\pi x}{2a} \times \cos. \frac{2\pi H t}{2T} \\
& \quad + \sin. \frac{3\pi X}{2a} \times \sin. \frac{3\pi x}{2a} \times \cos. \frac{3\pi H t}{2T} \\
& \quad \left. + \&c. \text{ à l'infini} \right),
\end{aligned}$$

où il est à remarquer que les intégrations doivent se faire en supposant X , Y , & V variables, & t , & x constantes.

38. Si on réfléchit maintenant sur ces formules, on s'apercevra, que la première partie de l'expression de y , & la seconde partie de l'expression de u qui ne diffèrent entr'elles, que par rapport aux quantités Y & V seront sommables au moyen de la formule trouvée (art. 25.). Qu'on suppose donc, pour simplifier le calcul, que les

h

quan-

13
quantités V s'évanouissent dans la formule de y , & les quantités Y dans celle de u , ce qui réduit le problème aux seuls cas considérés jusqu'à présent dans les cordes vibrantes; & on pourra se contenter de faire le calcul pour la valeur de y , puisque en changeant simplement les Y en V on obtiendra tout de suite celle de u . Je ramène d'abord l'expression $\sin. \frac{\pi x}{2a} \times \cos. \frac{\pi Ht}{2T}$ à celle-ci

$$\frac{\sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T} \right) + \sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T} \right)}{2},$$
 & en opérant de la même manière sur toutes les autres je change la formule en

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{a} \int dx Y \left(\sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T} \right) \right. \\ & + \sin. \frac{2\pi X}{2a} \times \sin. \frac{2\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T} \right) \\ & + \sin. \frac{3\pi X}{2a} \times \sin. \frac{3\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T} \right) \\ & + \text{\&c. à l'infini}) \\ & + \frac{1}{a} \int dx V \left(\sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T} \right) \right. \\ & + \sin. \frac{2\pi X}{2a} \times \sin. \frac{2\pi}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T} \right) \\ & + \sin. \frac{3\pi X}{2a} \times \sin. \frac{3\pi}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T} \right) \\ & + \text{\&c. à l'infini}). \end{aligned}$$

Or si l'on met dans la formule de l'art. 25. au lieu des

quantités D leurs valeurs $\pm \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\sin. \frac{s\mu\pi}{2m}}{\sin. \frac{\mu\pi}{2m}}$ & qu'on mul-

multiplie tout par $2^{m-1} \sin. \frac{\mu \pi}{2m}$, on trouve généralement

$$\sin. \frac{\mu \pi}{2m} \times \sin. \frac{\lambda \pi}{2m} + \sin. \frac{2\mu \pi}{2m} \times \sin. \frac{2\lambda \pi}{2m} + \sin. \frac{3\mu \pi}{2m} \\ \times \sin. \frac{3\lambda \pi}{2m} + \text{&c.} + \sin. (m-1) \frac{\mu \pi}{2m} \times \sin. (m-1) \frac{\lambda \pi}{2m}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \frac{\sin. \frac{\mu \pi}{2m} \times \sin. \frac{\lambda \pi}{2}}{\cos. \frac{\lambda \pi}{2m} - \cos. \frac{\mu \pi}{2m}}, \text{ où le signe } + \text{ a lieu,}$$

lorsque μ est impair, & le signe $-$ lorsqu'il est pair, donc si l'on pose $\frac{\mu}{m} = \frac{X}{s}$, & $\frac{\lambda}{m} = \frac{x}{s} \pm \frac{Ht}{T}$, il en résultera

$$y = \pm \frac{1}{2s} \int \frac{dx Y \sin. \frac{\pi X}{2s} \times \sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{mx}{s} \pm \frac{mHt}{T} \right)}{\cos. \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{s} \pm \frac{Ht}{T} \right) - \cos. \frac{\pi X}{2s}} \\ \pm \frac{1}{2s} \int \frac{dx Y \sin. \frac{\pi X}{2s} \times \sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{mx}{s} - \frac{mHt}{T} \right)}{\cos. \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{s} - \frac{Ht}{T} \right) - \cos. \frac{\pi X}{2s}}$$

Or puisque m est infini, $m \left(\frac{x}{s} \pm \frac{Ht}{T} \right)$ sera toujours un nombre entier quels que soient x & t , donc l'on aura $\sin. \frac{\pi}{2} \left(\frac{mx}{s} \pm \frac{mHt}{T} \right) = 0$, & par conséquent les termes qui constituent les intégrales exprimés par \int s'évanouiront en général. Il y a pourtant un cas particulier à excepter, c'est celui où $\frac{x}{s} \pm \frac{Ht}{T}$ dans la première intégrale, & $\frac{x}{s} - \frac{Ht}{T}$ dans la seconde deviennent $= 2s \pm \frac{X}{s}$, s dénotant un nombre quelconque entier positif,

ou négatif, car dans ces cas les dénominateurs $\cos. \frac{\pi}{2}$
 $(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}) - \cos. \frac{\pi X}{2a}$, & $\cos. \frac{\pi}{2} (\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}) - \cos. \frac{\pi X}{2a}$
 deviennent égaux à zéro, & les termes se trouvent ex-
 primés par $\frac{0}{0}$. Pour en déterminer les vraies valeurs on
 prendra la différentielle des numérateurs, & des dénomi-
 nateurs, en considérant $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la première for-
 mule, & $\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la seconde pour les seules varia-
 bles; on mettra ensuite à leur place la quantité $2s$
 $\pm \frac{X}{a}$; l'on trouvera donc en premier lieu

$$\frac{1}{2a} \int \frac{dx Y \sin. \frac{\pi X}{2a} \times \sin. \frac{\pi}{2} (\frac{mx}{2a} + \frac{mHt}{T})}{\cos. \frac{\pi}{2} (\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}) - \cos. \frac{\pi X}{2a}} =$$

$$- \frac{m}{2a} \times \frac{dx Y \sin. \frac{\pi X}{2a} \times \cos. \frac{\pi}{2} (2ms \pm \frac{mX}{a})}{\sin. \frac{\pi}{2} (2s \pm \frac{X}{a})}$$

Mais puisque $\frac{mX}{a}$ est un nombre infini $= \mu$ on a $\cos. \frac{\pi}{2}$
 $(2ms \pm \frac{mX}{a}) = \mp 1$, le signe supérieur répondant à μ
 impair, & l'inférieur à μ pair; l'on a de plus $\sin. \frac{\pi}{2}$
 $(2s \pm \frac{X}{a}) = \pm \sin. \frac{\pi X}{2a}$, donc l'expression précédente
 se réduit à $\pm \frac{m dx Y}{2a}$, ou bien puisque $a = m dx$ elle
 devient

devient $\pm \frac{Y}{2}$, où Y est l'ordonnée qui répond l'abscisse X ,
 favoir à l'abscisse $= \pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans le
 premier état du système, d'où l'on voit que cette ordon-
 née doit toujours être prise avec le même signe que toute
 la quantité $x + \frac{aHt}{T} \pm 2sa$. Que l'on dénote cette
 ordonnée par $\phi. (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa])$; & que
 l'on dénote de même par $\phi. (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])$
 celle qui répond à l'abscisse $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$, &
 qu'on fasse sur la seconde partie de l'expression générale
 de y , des opérations semblables à celle qu'on a pratiqué
 sur la première, on trouvera enfin

$$y = \frac{\phi. (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa]) + \phi. (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])}{2}$$

39. Soit (Fig. 5.) AB l'axe; & AeB la courbe qui
 représente le premier état du système dans le cas où le nom-
 bre des corps mobiles est infini, on trouvera la figure de
 cette courbe pour un tems quelconque t , en ordonnant à
 une abscisse quelconque x la quantité y égale à la moitié
 de la somme des appliquées qui répondent aux abscisses \pm
 $(x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans
 cette première courbe donnée. A l'égard des signes am-
 bigus, & du nombre indéterminé s , on remarquera, que
 puisque l'axe AB est d'une longueur donnée a , il faut
 que les abscisses qu'on y doit prendre ne surpassent pas
 la quantité a , & de plus qu'elles soient toujours positives,
 & ces conditions suffiront pour déterminer tout-à-fait chacune
 des abscisses en question.

Si

Si $x + \frac{aHt}{T}$ est moindre que a , on supposera $s = 0$, & on prendra le signe $+$, & l'ordonnée sera positive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ est plus grand que a mais moindre que $2a$, on fera $s = 1$, & on prendra le signe $-$, l'on aura donc l'abscisse $= 2a - x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être prise négative.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera $s = 1$; & on prendra le signe $+$, l'abscisse sera donc dans ce cas $x + \frac{aHt}{T} - 2a$, & l'ordonnée devra être de nouveau positive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ se trouve plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on fera $s = 2$, & on prendra le signe $-$, ainsi l'abscisse deviendra $4a - (x + \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée correspondente devra être prise négativement, & ainsi de suite.

Par un raisonnement semblable, on trouvera que lorsque $x - \frac{aHt}{T}$ est positif, l'on doit faire $s = 0$; & qu'il faut employer le signe $+$, ce qui donne l'ordonnée positive.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient négatif mais moindre que a , on supposera $s = 0$, & on prendra le signe $-$; l'on aura ainsi l'abscisse positive $-(x - \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée devra être prise négativement.

Si

Si $x - \frac{aHt}{T}$ étant négatif est encore plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera dans ce cas $s = -1$; & on prendra le signe $-$, ainsi l'on obtiendra l'abscisse positive $-(x - \frac{aHt}{T}) - 2a$, & l'ordonnée devra être prise négativement.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$; on continuera à faire $s = -1$, & on prendra de nouveau le signe $+$, ce qui donnera l'abscisse positive $4a + x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être encore positive; & ainsi de suite.

L'on voit assez par tous ces cas particuliers que nous venons de développer, que quelle que soit la longueur de l'abscisse, il sera toujours possible de la réduire en sorte qu'elle ne surpasse plus l'axe donné AB . On pourra simplifier encore cette réduction, en supposant que les abscisses données, soient repliées (pour ainsi dire) sur l'axe une, ou plusieurs fois, selon qu'elles se trouvent plus, ou moins excédentes, & les ordonnées devront ensuite être prises alternativement positives, & négatives selon les loix ci-dessus établies. Mais si l'on veut avoir une construction tout-à-fait simple & générale, on pourra la déduire aisément de la manière suivante (Fig. 10.). Aiant tracé la courbe initiale ANB qu'on répète sa description de part & d'autre à l'infini, en la posant alternativement au dessus, & au dessous de l'axe, de sorte que les mêmes branches soient liées entr'elles par les mêmes extrémités. Considérant la courbe ainsi engendrée comme une courbe unique & continue, on prendra dans l'axe AB qui s'étend à l'infini de part & d'autre toutes les abscisses qu'on voudra, sans s'embarasser qu'elles soient négatives, ou plus grandes que

que a , ainsi la demisomme des ordonnés qui se trouveront répondre aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, quelle que soit la valeur de x & de t , donnera toujours la vraie ordonnée qui convient à l'abscisse x après le tems t .

40. Nous avons supposé $H = \sqrt{\left(\frac{2Eh}{aS}\right)}$ (art. 35.) Or dans le cas de la corde vibrante E exprime le poid qui tend la corde a sa longueur, & S son poid total; (art. 9. & 35.), on aura donc $H^2 = \frac{T^2c}{a^2}$ (art. 12.), & par conséquent $\frac{aH}{T} = \sqrt{c}$; & les ordonnées, dont on doit prendre la demisomme répondront aux abscisses $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$. Nous aurons donc par ce moien la construction de la figure que forme une corde tendue pour un tems quelconque t en cas qu'elle ait été d'abord forcée de prendre une figure quelconque donnée, & qu'ensuite on l'ait relâché tout-à-coup, & cette construction est évidemment la même que Mr. Euler a inventée sur la même hypothèse.

Voilà donc la théorie de ce grand Géomètre mise hors de toute atteinte, & établie sur des Principes directs & lumineux, qui ne tiennent en aucune façon à la loi de continuité que demande Mr. D'Alembert; voilà encore comment il peut se faire que la même formule qui a servi pour appuyer & démontrer la théorie de Mr. Bernoulli sur le mélange des vibrations isocrones, lorsque le nombre des corps mobiles étoit fini, nous en dévoile l'insuffisance dans le cas où le nombre de ces corps devient infini. En effet le changement que subit la formule en passant d'un cas dans l'autre, est tel que les mouvemens simples qui composoient les mouvemens absolus de tout le système s'annéantissent pour la plus part, & que ceux qui restent
se

se défigurent & s'altèrent de façon qu'ils deviennent absolument méconnoissables. Il est vraiment fâcheux qu'une théorie aussi ingénieuse, & qui auroit pu sans doute jeter des grandes lumières sur des matières également obscures qu'importantes, se trouve démentie dans le cas principal qui est celui, auquel se rapportent tous les petits mouvemens réciproques qui ont lieu dans la nature.

41. Si l'on veut que la corde soit étendue en ligne droite au commencement de son mouvement, & que tous ses points reçoivent en cet état des vitesses quelconques, on supposera que les ordonnées à la courbe ne représentent plus les premiers éloignemens de points de la corde de l'axe, mais les vitesses des mêmes points au premier instant; & les courbes qu'on trouvera pour les instans suivans donneront de la même manière leurs vitesses suivantes (art. 38.).

CHAPITRE VI.

Reflexions sur les calculs précédens.

42. **L**A méthode que j'ai employé dans le Chapitre III. est à la vérité un peu longue, & fort compliquée; cependant elle est, si je ne me trompe, l'unique qui puisse conduire à une solution directe, & générale, telle que nous nous sommes proposé.

Quoique l'intégration des équations différentielles s'achève fort aisément par l'ingénieuse méthode de Mr. D'Alembert, cependant il est clair qu'on est encore après cela beaucoup éloigné du but principal, car il s'agit de plus de tirer d'un nombre indéfini d'équations autant d'incon-

nues,

nues, & de les exprimer toutes par une même formule générale. La difficulté de cette opération n'a pas sans doute échappé au savant Géomètre, dont nous venons de faire mention; car ayant proposé à résoudre le problème des mouvemens des cordes vibrantes, en les regardant comme des fils extensibles chargés de plusieurs petits poids, il s'est contenté de dire qu'on auroit toujours pu trouver leurs vibrations *à peu près* (Voies l'art. 44. de son Mémoire cité ci-dessus).

Il seroit à souhaiter que l'Analyse qui a réussi dans ce cas pût également s'appliquer à tous les autres qui dépendent de la résolution d'un nombre indéfini d'équations différentielles toutes semblables entr'elles, & où les changeantes ne montent qu'à la première dimension; puisqu'il est facile de démontrer que tous les petits mouvemens réciproques qui peuvent avoir lieu dans un système quelconque de corps semblables, qui agissent les uns sur les autres tous d'une même manière, sont nécessairement contenus dans de telles équations. Nous serions par-là en état de suivre les actions de la nature de beaucoup plus près, qu'on n'a osé le faire jusqu'à présent.

J'ai déjà tenté une solution générale du problème des vibrations des cordes élastiques, & des chaînes pesantes; mais étant maintenant fort pressé sur l'impression de cette pièce, & ayant d'ailleurs quelques autres occupations indispensables, je ne puis pas pousser assez loin ces recherches, c'est pourquoi je me réserve à traiter ce sujet dans une autre occasion.

Au reste si on suppose dans notre cas que les corps se meuvent dans un milieu, dont la résistance soit proportionnelle à $eu + e$, e & e dénotant des constantes quelconques, la double intégration des équations différentielles réussira de même; & si les quantités e & e sont assez petites par rapport à la quantité e , on pourra encore
achever

achever le calcul par un procédé semblable à celui que nous avons exposé plus haut. Cette Analyse pourroit être à la vérité de quelque utilité dans la recherche de la diminution du son, mais ce seroit s'écarter trop de l'objet principal que de la vouloir exposer ici tout au long.

43. La construction que nous avons trouvée dans le chapitre précédent pour le cas, où le nombre des corps mobiles est infini, est fondée entièrement sur ce qu'une suite infinie de produits de deux sinus, dont les Arcs croissent en progression arithmétique est toujours égale à zero, excepté dans le cas, où les sinus devenant égaux la suite donnée se change en une suite des quarrés des mêmes sinus. Quoique cette vérité découle immédiatement de la formule, que nous avons trouvée pour exprimer la somme d'une telle suite, cependant comme c'est là un des points principaux de notre Analyse, il ne sera pas hors de propos de démontrer encore la même proposition d'une autre manière, qui soit & plus directe, & plus lumineuse.

Soit proposée la suite infinie

$\sin. \phi \times \sin. \theta + \sin. 2 \phi \times \sin. 2 \theta + \sin. 3 \phi \times \sin. 3 \theta + \&c.$
 si l'on développe chaque terme par les théorèmes de la multiplication des angles, on aura les deux series

$$\begin{aligned} & \cos. (\phi - \theta) + \cos. 2 (\phi - \theta) + \cos. 3 (\phi - \theta) + \&c. \\ & \cos. (\phi + \theta) + \cos. 2 (\phi + \theta) + \cos. 3 (\phi + \theta) + \&c. \end{aligned}$$

dont chacune est sommable par la théorie des progressions géométriques. Supposons pour simplifier le calcul, que la serie dont on veut prendre la somme soit généralement $\cos. x + \cos. 2 x + \cos. 3 x + \&c.$ On réduira d'abord chaque terme aux expressions imaginaires exponentielles, ainsi l'on obtiendra

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} + e^{3x\sqrt{-1}} + \&c.}{+ \frac{e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}}$$

ces deux suites traitées comme deux progressions géométriques infinies, se changent par les règles connues en

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{-x\sqrt{-1}})}, \& \text{réduisant au dénominateur commun } \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} - 2}{2(2 - e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}, \text{ sa-}$$

voir $\frac{\cos. x - 1}{2(1 - \cos. x)} = -\frac{1}{2}$, & telle est la valeur d'une suite quelconque infinie de cosinus, dont les Arcs croissent en progression arithmétique. En appliquant ceci à notre cas, on trouvera la somme des deux suites données $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$, quelles que soient les valeurs des angles ϕ , & θ . Cependant lorsque $\theta = \phi$, il est clair que les deux séries se réduisent à $1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$

$\frac{\cos. 2\phi + \cos. 4\phi + \cos. 6\phi + \&c.}{2}$ Si $m - 1$ est le nombre des termes dans chacune de ces suites, la somme de la première est nécessairement $= \frac{m - 1}{2}$, la somme de la seconde est par ce que nous avons trouvé ci-dessus $= -\frac{1}{2}$, donc la somme de toutes deux se trouvera dans ce cas $= \frac{m - 1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$.

44. Mais dira-t-on comment peut il se faire, que la somme de la suite infinie, $\cos. x, + \cos. 2x, + \cos. 3x, + \&c.$ soit toujours $= -\frac{1}{2}$, puisque dans le cas de x

$= 0,$

$= 0$, elle devient nécessairement égale à une suite d'autant d'unités; je répons que cela provient des termes qui se détruisent naturellement dans tous les cas excepté dans celui, où $x = 0$. Pour rendre la chose plus sensible cherchons la somme de la suite, $\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \&c. + \cos. mx$; on trouvera par la même méthode ci-dessus qu'elle est égale à

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}} - e^{-(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{-x\sqrt{-1}})}$$

expression qui se réduit à $\frac{\cos. x - 1 + \cos. mx - \cos. (m+1)x}{2(1 - \cos. x)}$

$$= \frac{\cos. mx - \cos. (m+1)x}{2(1 - \cos. x)} - \frac{1}{2}. \text{ Or dans le cas}$$

où m est un nombre infini, l'on suppose que l'1 évanouisse auprès d' m , d'où le terme $\cos. (m+1)x$ devient $= \cos. mx$, & la formule $\frac{\cos. mx - \cos. (m+1)x}{2(1 - \cos. x)}$

reste $= 0$; mais lorsque $x = 0$ le dénominateur devient aussi égal à zero; c'est pourquoi elle reçoit une valeur donnée qu'on trouvera par la différentiation du numérateur & du dénominateur. On a donc en différentiant

$$\frac{(m+1)x \sin. (m+1)x - m \sin. mx}{2 \sin. x} \text{ qui se réduit}$$

de nouveau à $\frac{0}{0}$ par la supposition de $x = 0$; qu'on différencie une seconde fois, il en viendra

$$\frac{(m+1)^2 x \cos. (m+1)x - m^2 x \cos. mx}{2 \cos. x}, \text{ \& faisant}$$

$$x = 0, \frac{(m+1)^2 - m^2}{2} = m + \frac{1}{2}; \text{ donc la valeur}$$

de la serie est dans ce cas $= m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = m$ précisément comme l'on a vu plus haut.

Au

Au reste par la méthode de sommer les suites des cosinus, ou sinus, que nous venons d'expliquer, on trouvera que la suite finie, $\sin. \phi \times \sin. \theta + \sin. 2\phi \times \sin. 2\theta + \sin. 3\phi \times \sin. 3\theta + \&c. + \sin. (m-1)\phi \times \sin. (m-1)\theta$ est
$$= \frac{\sin. m\phi \times \sin. (m-1)\theta - \sin. (m-1)\phi \times \sin. m\theta}{2 (\cos. \phi - \cos. \theta)}$$

ce qui convient avec ce qu'on a trouvé (art. 38.) en faisant $\phi = \frac{\lambda \pi}{2m}$, & $\theta = \frac{\mu \pi}{2m}$, & supposant μ un nombre entier quelconque.

45. Nous avons enseigné dans l'art. 39. à construire l'ordonnée y , & la vitesse u , l'une dans le cas, où les vitesses initiales V sont $= 0$, & l'autre dans le cas, où les premières ordonnées Y sont $= 0$; cependant si on vouloit une construction générale pour tous les cas possibles, on pourroit la trouver moiennant les formules précédentes. Car on fait que les expressions de u ne sont autre chose, que les différentielles de celles de y en prenant le seul tems t pour variable, & effaçant le dt ; donc si après avoir réduit la première partie de l'expression de y qui contient seulement les Y , par la méthode donnée (art. cité), on différencie la formule qui en résulte, en ne regardant que le tems t pour variable, on aura la formule qui donne la valeur de la première partie de l'expression de u , & qui contient aussi les seules quantités Y . De même si l'on intègre par dt la formule réduite de la seconde partie de l'expression de u , où se trouvent les seules quantités V , & qui est semblable à celle de y pour les quantités Y , comme on a vu (art. 38.) on aura la formule qui donnera la valeur de la seconde partie de l'expression de y , qui contient de même les seules quantités V . Ces calculs sont assez longs, & compliqués, & ils demandent d'ailleurs beaucoup de circonspection, c'est pourquoi je ne fais que les indiquer ici pour montrer la route qu'on devoit tenir

tenir pour parvenir à une réduction directe & générale des expressions données. Il est cependant visible qu'on pourra aisément s'en passer si on veut se contenter d'une construction des quantités y & u pour chaque tems t dérivée de celle qu'on a trouvé (art. 39.).

Soit donc, comme dans l'article cité, ANB la figure dont les ordonnées MN représentent les premières excursions Y , & anb celle dont les ordonnées expriment les vitesses initiales V . Qu'on réitérè leur description de part & d'autre (Fig. 10. 11.) à l'infini de la manière enseignée; qu'on construise ensuite deux autres courbes infinies (Fig. 12. 13.) $A^1 N^1 B^1$, $a^1 n^1 b^1$, dont la première $A^1 N^1 B^1$ soit telle que chaque ordonnée $M^1 N^1$ qui répond à l'abscisse $A^1 M^1 = AM$ soit toujours quatrième proportionnelle à la sous-tangente au point N , à l'ordonnée MN , & à l'unité; & la seconde $a^1 n^1 b^1$ ait ses ordonnées $m^1 n^1$, égales aux aires anm , qui répondent aux abscisses $am = a^1 m^1$. Par le moien de ces quatre courbes que je nommerai, comme celles de Mr. D'Alembert, courbes génératrices, on aura toujours l'ordonnée y , & la vitesse u pour chaque abscisse x , & pour quelque tems t que ce soit. Car on n'aura qu'à prendre dans la courbe ANB la demisomme des ordonnées qui répondent aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$; & dans la courbe $a^1 n^1 b^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondront aux mêmes abscisses; & la somme totale de ces quantités sera l'ordonnée y cherchée. De même pour la vitesse u , on prendra dans la courbe anb la demisomme des ordonnées qui appartiennent aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, & dans la courbe $A^1 N^1 B^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondent aux mêmes abscisses, & la somme totale de ces quantités donnera la valeur cherchée de la vitesse u .

Quoique

Quoique cette construction soit entièrement fondée sur les tangentes, & sur la quadrature des courbes génératrices trouvées, il ne paroît cependant pas qu'elle puisse être sujette aux difficultés que nous avons exposées (art. 5.) Car, la construction des courbes génératrices une fois établie, il n'est plus besoin d'avoir recours aux théories du calcul différentiel & intégral, pour en déduire celles des autres courbes cherchées; puisque on peut indépendamment de ces calculs par la simple considération des tangentes, & des quadratures, démontrer que ces courbes résolvent le problème sans avoir en aucune façon égard à la loi de continuité dans leurs équations.

Si l'on prend pour la courbe ANB la courbe initiale de la corde tendue, & que l'autre courbe anb représente les vitesses qu'on donne à tous ses points en la relâchant tout-à-coup, on aura de cette façon la solution générale du problème des cordes vibrantes telle que Mr. D'Alembert l'a eu en vuë dans l'art. xxiii. & suiv. son Mémoire. Il est vrai que ce grand Homme ne cesse d'inculquer que les expressions des vitesses, & des excursions initiales des points de la corde ne peuvent pas être données à volonté (art. xxxiv.) ce qu'il répète encore expressément dans l'art. ii. de son Addition. Mais nous avons fait voir plus haut les raisons qui obligoient cet Auteur à penser ainsi, & ces raisons cessent d'avoir lieu dès qu'on considère tous les points de la corde comme isolés dans leurs mouvemens, comme nous l'avons fait dans les calculs précédens.

Théorie des cordes de Musique, & des Flutes.

46. **L**Es cordes, dont on se sert ordinairement pour les instrumens de Musique, sont de boiau ou d'acier, ou de cuivre; à l'égard des premières, elles n'ont presque point d'autre élasticité que celle qui est produite par la tension, mais il n'en est pas de même des autres, dont la roideur se manifeste même, lorsque elles sont tout-à-fait lâches. Cependant il est aisé de voir que la force de cette roideur pour mouvoir la corde, doit être bien petite par rapport à celle qui naît de la tension, d'où il s'ensuit que nous pouvons, sans crainte d'erreur, supposer toutes les cordes parfaitement flexibles, en tenant compte seulement de l'effet de la tension donnée. La manière commune de les mettre en vibration, en les touchant par quelqu'un de leurs points, soit avec un archet, ou quelque'autre instrument, consiste à les faire sortir de leur état de repos, & à donner à tous leurs points des impulsions quelconques. Donc si l'on a une corde uniformément épaisse, dont la masse & la longueur soient données, & la tension soit exprimée par un poid équivalant, on pourra toujours par la théorie exposée dans les chapitres précédens trouver le mouvement de cette corde pour un tems quelconque de quelque façon que ses vibrations aient été d'abord produites. Mais la connoissance des mouvemens particuliers des cordes est de peu de conséquence dans la pratique, & ce n'est qu'à la durée de leurs vibrations qu'il est important d'avoir égard, puisque c'est de-là que dépend, selon le sentiment généralement reçu par tous les Physiciens, le ton grave, ou aigu qu'elles doivent rendre.

k

Or

Or si l'on examine la construction des courbes génératrices exposée (art. 45.), on s'apercevra aisément que leur nature est telle, que si on augmente, ou qu'on diminue les abscisses d'un multiple quelconque de $2a$ les ordonnées correspondantes demeurent tout-à-fait les mêmes; donc si l'on fait que la quantité $\frac{aHt}{T}$ qui doit être ajoutée, & retranchée de chaque abscisse x devienne un multiple quelconque de $2a$, on aura la valeur du tems t , après lequel la corde reprendra sa première situation, avec les mêmes vitesses dans tous ses points. Ce tems sera donc $= \frac{2sT}{H}$ quelque nombre entier positif qu'on pose au lieu de s . C'est pourquoi le tems des oscillations sera toujours le même pour la même corde, & il ne dépendra en aucune façon du premier ébranlement, qui peut varier à l'infini. Pour connoître plus exactement ce tems qui est $= \frac{2T}{H}$, on n'a qu'à remettre au lieu de H sa valeur première $\sqrt{\left(\frac{2Es}{a}\right)}$ (art. 25.), & on aura $T\sqrt{\left(\frac{2aS}{Eb}\right)}$ pour le tems d'une oscillation entière, composée d'une allée, & d'une revenue, où a est la longueur de la corde, S son poid, E le poid qui est égal à la force de tension; or comme h exprime la hauteur d'où un corps pesant peut tomber librement durant le tems T (art. 6.), si l'on fait ce tems d'une seconde, on aura le tems cherché exprimé de même en secondes de cette façon $\sqrt{\left(\frac{2aS}{Eb}\right)}$. Supposons que le rapport du poid de la corde, à celui qui la tend soit comme $a:b$, b sera une quantité qui ne dépendra que de l'épaisseur, & de la gravité spécifique de la corde; on aura donc

$\frac{S}{E} = \frac{a}{b}$, & par conséquent la formule du tems des vibrations entières deviendra $= \frac{2a}{\sqrt{2bb}}$, & une oscillation

simple devra être censée d'une durée $= \frac{a}{\sqrt{2bb}}$ tout de même comme si la corde eut toujours fait ses mouvemens selon les lois de Mr. Taylor. Cette formule a été regardée jusqu'à présent pour vraie par tous les Auteurs qui ont écrit d'Acoustique, parce qu'elle s'accorde entièrement avec les proportions connues des divers tons des cordes, qu'on a toujours fait dépendre de la durée de leurs oscillations. C'est aussi par cette raison que plusieurs d'entr'eux ont cru qu'une corde tendue ne pouvoit resonner à moins que ses vibrations ne fussent toutes régulières & isocrones comme celles des pendules; ce qui paroît sans doute inconcevable vû qu'une même corde rend toujours le même son, lorsqu'elle est pincée, ou ébranlée de quelque façon que ce soit. La démonstration que nous venons de donner peut donc servir à établir ces vérités généralement admises, savoir, que le ton d'une corde est toujours proportionel au nombre de ses vibrations dans un tems donné, & que ce ton se conserve toujours le même, tandis que la corde reste dans les mêmes circonstances.

47. Quoique la connoissance absolue de la durée de chaque vibration dans une corde donnée ne soit guere d'usage dans la pratique ordinaire, elle est cependant nécessaire pour la détermination d'un son fixe, tel que Mr. Sauveur l'a eu en vue dans l'Hist. de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1700. La méthode que ce savant Auteur a imaginée pour cela est à la vérité fort ingénieuse, mais elle est presque impraticable, à cause de l'extrême délicatesse d'oreille qu'il faut pour apprécier

les momens des *bâtemens* de plusieurs sons , & de la grande difficulté qu'on rencontre à mesurer au juste l'intervalle du tems qui se passe entre deux de ces *bâtemens* consécutifs . Si la détermination de ce son fixe est de tant de conséquence, comme elle l'a paru à Mr. Sauveur, je crois qu'on pourra la tirer avec plus d'exactitude, & de facilité de la formule trouvée, qui ne requiert d'autres *données* que la longueur de la corde, sa gravité spécifique, & la raison de son poid à celui, par lequel elle est tendue. Par exemple si l'on veut selon Mr. Sauveur, que le son fixe rende 100 vibrations dans une seconde, on fera $\frac{a}{\sqrt{2bb}} = 100$, d'où b , & h étant donnés, on tirera $a = 100 \sqrt{2hb}$.

48. Nous venons de voir que le nombre des vibrations d'une corde donnée est généralement toujours le même; il est cependant quelque cas particulier, où ce nombre peut être diminué, & réduit à la moitié, au tiers &c. Pour s'en convaincre on n'a qu'à réfléchir, que la corde vibrante ne revient à son premier état, que parceque la construction des courbes génératrices est telle, qu'en levant, où ajoutant aux abscisses les tems donnés les ordonnées demeurent les mêmes. Donc si on suppose que la figure initiale de la corde participe déjà à cette propriété, savoir qu'elle contienne deux, ou trois, ou plusieurs ventres égaux, & disposés alternativement au dessus, & au dessous de l'axe, & qu'il en soit de même pour la courbe des vitesses, on verra aisément que les courbes génératrices déduites de celles-ci rendront la corde à son premier état dans la moitié, le tiers &c. du tems donné. Ainsi la durée d'une oscillation se reduira dans ce cas à

$\frac{a}{n\sqrt{2bb}}$, ou n exprime le nombre des ventres primitifs.

Il n'en sera pas de même si les ventres ne se trouvent pas

pas égaux, & disposés de la façon qu'on a dit, car il sera toujours facile de démontrer, que les courbes résultantes ne pourront jamais avoir les propriétés nécessaires, afin que les vibrations puissent s'achever dans un tems différent de celui qui convient à la nature de la corde donnée. Mr. Euler avoit déjà fait cette importante remarque pour le seul cas où la corde part du repos dans les Mémoires cités de l'Académie de Berlin.

49. Lorsque une corde est en vibration, il n'y a généralement parlant que les deux bouts qui restent toujours immobiles; cependant si l'on fait attention aux cas particuliers qu'on vient d'examiner, on voit clairement que tous les points, où la figure initiale de la corde coupe l'axe doivent nécessairement demeurer en repos, puisque il y a de part & d'autre des branches semblables situées alternativement au dessus, & au dessous de l'axe. Voions donc s'il ne pourroit pas y avoir d'autres points qui fussent revêtus des mêmes propriétés.

Qu'on se représente pour cela une branche entière $AMNB$ de la courbe génératrice pour la corde AB ; & qu'on suppose qu'un de ses points quelconque M doive rester immobile. (Fig. 14.) Il est d'abord évident qu'elle devra couper l'axe dans ce même point, il faudra ensuite que la partie MN de la courbe soit égale & semblable à la partie AM , afin que la demi-somme des ordonnées également distantes de part & d'autre soit toujours nulle, d'où il s'ensuit qu'à moins que le point M ne soit à la moitié de l'axe AB le point N tombera hors du point B , & ainsi la courbe cherchée $AMNB$ coupera toujours l'axe en deux points M & N . Elle sera par conséquent composée de trois parties AM , AN , & NB , dont les deux premières sont égales par supposition, & la troisième est encore arbitraire. Or je dis que la courbe $AMNB$ doit avoir toutes ces parties égales, semblables, & situées alterna-

terna-

ternativement au dessus & au dessous de l'axe AB . Pour s'en convaincre, qu'on réfléchisse, que, puisque les branches qui se trouvent situées de part & d'autre des deux points A & M doivent être semblables & égales dans toute la courbe génératrice engendrée par la description répétée de celle-ci, il faut que cette courbe ait toutes ses parties de même nature que celle qui est comprise entre les points A & M , d'où il suit que la partie de l'axe NB ne peut être qu'égale à la partie AM ou double, ou triple &c., ou encore la moitié, ou le tiers &c. de sorte que l'axe entier AB puisse se diviser en un nombre de parties égales, & aliquotes aux deux parties données AM & MB . Et toute la courbe $AMNB$ devra dans ce cas couper l'axe à chaque point de ces divisions, & elle devra contenir de plus autant de ventres égaux correspondans.

On conclura donc que nul point d'une corde de Musique vibrante ne pourra demeurer en repos, à moins qu'il ne la divise en deux parties commensurables entr'elles; que dans ce cas la figure initiale de la corde, & la courbe des premières vitesses devront nécessairement avoir autant de branches égales & semblables, qu'il y aura d'unités dans les deux parties AM , MB , & qui seront de plus situées alternativement au dessus & au dessous de chacune des parties aliquotes, dans lesquelles tout l'axe AB sera divisé. Si donc en mettant une corde en vibration, on fait en sorte qu'un point quelconque reste immobile, sans empêcher que la vibration ne se communique, & ne s'étende de part & d'autre à toute la corde, cette corde se divisera naturellement en autant des parties égales qu'il en faut pour rendre commensurables les deux parties coupées par le point immobile. D'où il s'ensuit que, lorsque ces deux parties sont en elles-mêmes incommensurables, il sera impossible que le point de leur division puisse jamais rester en repos, & la corde dans

ce cas sera obligée de changer de figure d'un instant à l'autre, ce qui détruira nécessairement l'isocronisme, & la régularité de ses vibrations. Mais dans le cas, où le point immobile divise toute la corde en parties commensurables, il se formera pour lors un nombre de points de repos naturels, & la corde continuera de faire des oscillations régulières & isocrones, dont la durée ne sera que la moitié, le tiers, le quart &c. de la durée des oscillations entières, selon que les deux parties auront pour commune mesure la moitié, le tiers, le quart &c. de toute la corde, comme on l'a démontré (art. 48.).

Par un semblable raisonnement, on trouvera que si les points supposés immobiles coupent la corde en un nombre de parties quelconques elle se divisera en autant de parties égales qu'il en faudra, pour que chacune d'elles mesure exactement chacune des premières parties coupées; par conséquent si ces parties sont entr'elles incommensurables, les mouvemens de la corde deviendront irréguliers, pendant que dans tout autre cas les vibrations s'achèveront dans un tems proportionel réciproquement à celui des ventres naturels de la corde.

50. On s'est apperçu depuis long-tems qu'une corde pouvoit rendre dans certaines circonstances des sons aigus qui différoient plus, ou moins du son naturel, & on a même reconnu que ces sons n'étoient presque jamais que l'octave au dessus, l'octave de la quinte, & la double octave de la tierce.

Mr. Sauveur qui a fort bien traité cette matière dans son système général d'Acoustique, imprimé parmi les Mémoires de l'Académie Royale de Paris pour l'année 1701. s'est appliqué le premier, que je sache, à découvrir la véritable origine de ces divers sons rendus par une même corde qu'il appelle sons harmoniques; il prend (Fig. 15.) pour cela une corde d'une longueur quelconque qui étant pincée

pincée à vuide forme des vibrations simples & uniques qui rendent le son naturel de la corde qu'il nomme son fondamental ; il divise ensuite cette corde en un nombre de parties égales, & mettant un chevalet mobile, ou un autre obstacle quelconque léger, au premier point marqué des divisions, de sorte que le mouvement qu'on donne à la corde puisse se communiquer de part & d'autre, & que l'obstacle posé ne fasse d'autre effet que d'obliger le point, où il est appliqué, à rester toujours en repos, cet Auteur observe que si l'on ébranle la corde dans cet état, elle se divise naturellement par une espèce d'ondulation en autant de ventres égaux, dont les extrémités qui restent immobiles répondent précisément aux points marqués des divisions ; car aiant mis sur la corde divers morceaux de papier, il trouve, que ceux qui sont sur les neuds ne sont point du tout déplacés, les autres au contraire tombent aussi-tôt que la corde commence de se mouvoir. Mr. Sauveur compare de plus les sons harmoniques produits par une telle corde avec les sons naturels d'autres cordes semblables, & il reconnoit que la longueur de celles-ci doit toujours égaler celle de la partie de la corde donnée qui est interceptée entre le chevalet & le bout plus proche. Il en est de même si le chevalet est placé à la seconde, troisième &c. division, & en général la corde forme toujours autant de neuds immobiles à égale distance les uns des autres qu'il en faut pour que le chevalet réponde à un d'eux, & le son rendu est toujours semblable au son que produiroit une des parties de la corde comprise entre deux des points de repos naturels. Que si le chevalet divise la corde en deux parties incommensurables, la corde ne fait pour lors que fremir, sans résonner, & l'on n'entend qu'une espèce de bruit confus & désagréable à l'oreille.

L'on fait qu'en prenant le son d'une corde pour fondamental sa moitié rend l'octave au dessus, son tiers rend l'octave de la quinte, son quart rend la double octave du son fondamental, & la cinquième rend la double octave de la tierce; les autres divisions ne forment plus que des dissonances avec le son principal, à moins qu'elles ne donnent des octaves de ceux-ci. D'où il s'ensuit que l'on ne peut tirer d'une même corde d'autres sons harmoniques que la quinte, ou la tierce, en omettant les octaves qui peuvent être regardées comme des répétitions de leurs sons principaux. Ainsi la trompette marine qui est composée d'une seule corde, à laquelle on applique le doigt en la faisant résonner avec un archet, ne produit jamais d'autres sons que ceux qu'on vient de nommer, & le doigt tient lieu de l'obstacle léger qui divise les vibrations de toute la corde.

L'on a encore heureusement appliqué cette théorie à toutes les espèces de violons, où par le moyen d'une légère pression de doigt on produit des sons harmoniques très agréables à l'oreille, & qui s'approchent beaucoup du son des flutes; on pourroit même, je crois, avec beaucoup d'exercice parvenir à exécuter sur le violon une pièce quelconque de Musique par des sons toujours harmoniques, car pour en tirer tous les sons nécessaires, il ne s'agiroit que d'ajuster sur les cordes deux doigts, dont l'un fut appuyé fortement sur le manche, comme on le fait ordinairement, en appliquant en même tems l'autre au tiers, ou à la cinquième de la corde pour lui donner le son harmonique convenable. C'est aux habiles Musiciens à juger si l'exécution de ce projet n'est pas sujette à d'autres difficultés capables de rebuter les meilleurs Artistes.

§ 2. Nous avons fait voir dans l'art. 9. que les mouvemens des parties de l'air qui composent une fibre élastique

stique continue, ne diffèrent nullement de ceux des cordes vibrantes, si ce n'est en ce que les vibrations de celles-ci sont perpendiculaires à l'axe, au lieu que les autres sont longitudinales. Donc si l'on considère une fibre quelconque d'air, ou bien un amas de plusieurs fibres renfermées dans un tuyau qui les borne, & les distingue de la masse continue de l'air extérieur, ces fibres pourront recevoir dans toutes leurs parties des mouvemens semblables à ceux des points d'une corde de Musique d'égale longueur & d'égal poid, & dont la force de tension soit équivalente à celle de l'élasticité naturelle de l'air. Si donc les mouvemens de ces fibres peuvent se communiquer à l'air extérieur, il en résultera un son qui sera de même nature que celui qui seroit produit par la corde correspondante.

Voilà le principe, & l'origine de tous les instrumens à vent, qui constituent une classe d'instrumens de Musique non moins étendue, & non moins importante que celle des instrumens à cordes.

Le célèbre Mr. Euler a tâché le premier de rapprocher les théories de ces deux espèces d'instrumens dans une Thèse sur le son imprimée à Bâle l'année 1727., & puis dans son excellent traité de Musique qui a paru l'année 1739. Il compare en effet dans ces endroits la colonne d'air contenue dans un tuyau à une corde du même poid, & de même longueur, & qui seroit tendue par un poid égal à celui d'un cylindre de mercure, dont la base fut la même que celle du tuyau, & la hauteur celle du Baromètre. Par cette comparaison il détermine le son que doit rendre une flute quelconque donnée, & il le trouve entièrement d'accord avec l'expérience. Il faut avouer, que cette théorie a été portée par ce savant Auteur au plus haut degré de perfection, & qu'il n'y restoit rien à désirer qu'une démonstration analitique, & tirée de
la

la nature même des mouvemens qu'il a comparé ensemble. Mais pour mettre cette importante matière dans tout son jour, développons-en ici encore quelque cas particulier. Soit une flûte de longueur $= a$ depuis l'embouchure jusque à l'autre extrémité, soit b^a la largeur de sa base, que je suppose être par tout la même; on aura par

l'art. 46. la durée d'une oscillation aérienne $= \sqrt{\frac{Sa}{2Eb}}$,

où S est le poid de la colonne d'air contenue dans la flûte, & E son élasticité naturelle. Supposons donc k égal à la hauteur barométrique, & $1 : n$ la raison de la gravité spécifique de l'air à celle du mercure, on aura E égal au poid d'une colonne de mercure, dont la base est b^a , & la longueur $= k$; & S égal au poid d'une semblable colonne, dont la longueur soit seulement

$= \frac{a}{n}$, d'où $\frac{S}{E} = \frac{a}{nk}$; & par conséquent le tems d'une

oscillation sera $= \sqrt{\frac{a^2}{2nkb}} = \frac{a}{\sqrt{2nkb}}$, ce qui fait voir

que ces tems, toutes choses d'ailleurs égales, sont comme les longueurs des flûtes, auxquelles les tons répondent comme l'expérience nous l'enseigne en effet. Si l'on veut que la flûte achève 100 vibrations dans une seconde, ce qui produit le son fixe de Mr. Sauveur, on

fera $\frac{100a}{\sqrt{2nkb}} = 1^s$, d'où $a = \frac{\sqrt{2nkh}}{100}$; or nk exprime

précisément la hauteur de l'air supposé homogène qui se trouve à peu près $= 850 \times 32$ pieds, & h est de 15 pieds environ; donc $2nkh$ sera $= 850 \times 32 \times 30 = 816000$, dont la racine quarrée se trouve 903. 3 .. &c. ce qui étant divisé par 100 donne pour la longueur du tuyau 9 pieds & 33 milliemes de pied.

Il est vrai que Mr. Sauveur trouve d'après ses expériences des battemens que le tuyau d'Orgue qui rend le

son fixe est seulement de 5 pieds, ce qui donneroit suivant la théorie environ le double des vibrations que cet Auteur a déterminé pour chaque seconde; mais il est aisé de trouver la raison de cette différence si on réfléchit que les vibrations de deux cordes ne sont réellement concurrentes, c'est-à-dire commençantes en même tems, & se faisant dans le *même sens* qu'après un nombre de vibrations double de celui qui est porté par la nature des deux cordes données, d'où il suit, que puisque les *battemens* ne consistent que dans la concurrence des vibrations, le nombre déterminé par l'expérience de Mr. Sauveur sera précisément la moitié de ce qu'il est en effet, & dans ce cas les résultats de l'expérience s'accordent assez bien avec ceux de la théorie.

53. Puisque les mouvemens des parties de l'air contenu dans une flute quelconque sont les mêmes que ceux d'une corde de Musique correspondante, il s'ensuit que la durée de leurs vibrations pourra de même dans certains cas particuliers devenir moindre qu'à l'ordinaire, & n'en être plus que la moitié, le tiers, le quart &c., comme nous l'avons démontré dans les cordes vibrantes, lorsqu'elles se divisent en plusieurs ventres égaux. Or ceci arrive précisément dans les instrumens à vent, lorsque on augmente d'une certaine façon la force du souffle; car c'est une vérité de long-tems reconnue dans les trompettes, & dans toutes sortes de flutes, & sur tout dans les traversières, que par un simple changement d'embouchure l'on obtient depuis le son grave, ou fondamental, ceux qui y répondent comme les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, savoir l'octave au dessus la douzième, la quinzième, & la dix-septième majeure; car le son suivant est pros crit de l'harmonie du son principal.

Au reste quelque fondée & plausible que soit cette théorie des instrumens à vent, il faut pourtant avouer qu'on ne sauroit encore par son moien rendre raison de toutes les propriétés qu'on y observe, & qui regardent la forme de l'instrument, la largeur, & la position des trous. Car aiant mesuré au juste leurs distances dans des bonnes flutes traversières, & douces je ne les ai point trouvé tout-à-fait proportionnelles aux tons correspondans. De plus l'on sait que pour rendre certains tons, il faut une combinaison donnée de trous ouverts & bouchés ou entièrement, ou à demi seulement, ce qui me paroît fort difficile à expliquer par la simple comparaison des cordes vibrantes. Comme cette matière demande un examen long & exact de toutes les circonstances qui entrent dans chaque cas particulier, & que d'ailleurs cette pièce est actuellement sous presse, j'ai cru devoir différer ces recherches pour une autre occasion ou, suivant quelques vues que j'ai déjà formé, j'espère de pouvoir ramener aux lois de la théorie ci-dessus établie la plupart des bizarreries qui se rencontrent dans ces sortes d'instrumens.



SECTION SECONDE

De la propagation du son .

CHAPITRE PREMIER

De la vitesse du son .

34. **I**maginons une fibre élastique composée d'un nombre infini m de particules d'air, dont une quelconque reçoive par l'ébranlement des parties du corps sonore une impulsion donnée c , il s'agit de déterminer la loi suivant laquelle ce mouvement se communiquera aux autres particules de la même fibre. Soit AB (Fig. 15.) la longueur de toute la fibre $= a$, AC la distance de la particule C qui est frappée par le corps sonore $= X$, & AD la distance d'une autre particule quelconque D , dont on veut savoir le mouvement $= x$, on trouvera par l'application des formules données (art. 35.) que la vitesse u de cette particule sera exprimée par une seule série infinie, comme il suit

$$\begin{aligned}
 u = \frac{2c}{\pi} & \left(\sin. \frac{X\pi}{2a} \times \sin. \frac{x\pi}{2a} \times \cos. \frac{tH\pi}{2T} \right. \\
 & + \sin. \frac{2X\pi}{2a} \times \sin. \frac{2x\pi}{2a} \times \cos. \frac{2tH\pi}{2T} \\
 & + \sin. \frac{3X\pi}{2a} \times \sin. \frac{3x\pi}{2a} \times \cos. \frac{3tH\pi}{2T} \\
 & \left. + \&c. \text{ à l'infini } \right).
 \end{aligned}$$

Car tous les termes $P^1, P^{11}, P^{111} \&c.$ évanouissent par supposition, & les autres $Q^1, Q^{11}, Q^{111} \&c.$ se réduisent

à, $c \times \sin. \frac{X\pi}{2a}$, $c \times \sin. \frac{2X\pi}{2a}$, $c \times \sin. \frac{3X\pi}{2a}$. Qu'on

change maintenant le produit de $\sin. \frac{X\pi}{2a}$ par $\cos. \frac{tH\pi}{2T}$ avec les produits des sinus & cosinus des autres angles multiples en des simples sinus, & l'équation ci-dessus deviendra

$$u = \frac{c}{m} \left(\sin. \frac{x\pi}{2a} \times \sin. \left[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T} \right] \frac{\pi}{2} + \sin. \frac{2x\pi}{2a} \times \sin. \left[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T} \right] \frac{2\pi}{2} + \sin. \frac{3x\pi}{2a} \times \sin. \left[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T} \right] \frac{3\pi}{2} + \text{&c. à l'infini} \right.$$

$$\left. + \sin. \frac{x\pi}{2a} \times \sin. \left[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T} \right] \frac{\pi}{2} + \sin. \frac{2x\pi}{2a} \times \sin. \left[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T} \right] \frac{2\pi}{2} + \sin. \frac{3x\pi}{2a} \times \sin. \left[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T} \right] \frac{3\pi}{2} + \text{&c. à l'infini} \right).$$

On démontrera ici de la même manière que nous avons fait (art. 38.) sur des formules semblables, que ce deux suites infinies sont toujours égales à zero, excepté dans le cas, où $\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la première, & $\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}$

dans la seconde deviennent $= \pm \left(\frac{x}{a} + 2s \right)$, s dénotant un nombre quelconque entier positif, ou négatif; d'où il s'ensuit que la vitesse u dans chaque particule ne fera, pour ainsi dire, qu'instantanée, & qu'elle n'obtiendra jamais aucune valeur réelle, que lorsque $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T}$

$= \pm \left(\frac{x}{a} + 2s \right)$ quels que soient les signes qu'on y veuille prendre.

Cette

Cette équation contient comme on le voit un certain rapport entre les espaces x , & les tems t , les autres quantités X, a, H, T, S demeurant constantes. Elle contiendra donc la loi générale, suivant laquelle se fait la propagation du son.

§5. Pour développer cette importante matière autant qu'il est possible, imaginons que la particule D qui reçoit son petit mouvement instantané au bout du tems t soit éloignée par $DC = z$ de la première particule C qui a reçu l'impulsion extérieure; l'on aura donc $AD = x = z + X$, laquelle valeur substituée dans l'équation ci-dessus donnera $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{X+z}{a} + zS)$, &

multipliant par a , & transportant les termes $\pm \frac{Hat}{T} =$

$z + zSa$, ou bien encore $\pm \frac{Hat}{T} = -(zX + z + zSa)$;

& ces deux équations satisferont toujours également en prenant les signes ambigus comme on voudra. Or puisque le tems t doit toujours être positif l'ambiguïté des signes tombera nécessairement sur la quantité z qui pourra par conséquent avoir des valeurs positives, & négatives, d'où il suit que le son partant du point C se propagera également de part & d'autre vers A & vers B . De plus il est visible par ces formules que la communication du mouvement d'une particule à l'autre sera toujours uniforme, & qu'elle se fera avec une vitesse qui ne dépendra en rien de la première vitesse a imprimée extérieurement, puisque l'expression de cette vitesse ne se rencontre nulle part dans la formule trouvée. Voici donc les lois que les sons doivent toujours suivre dans leur propagation.

Une particule quelconque d'air ébranlée par le mouvement d'oscillation d'un corps sonore mettra en mouvement

vement les particules circonvoisines, & celles-ci les autres qui les suivent dans les fibres rectilignes, qui partent toutes du même point comme d'un centre commun; ces mouvemens dans chaque particule seront instantanés, & se communiqueront toujours avec une même vitesse constante, quelle que soit l'impulsion que la première particule ait reçu, d'où dépend la force, où la foiblesse du son. Ce n'est donc pas par une espèce d'ondulation que le son se propage, comme l'ont cru jusqu'ici tous les Physiciens d'après Mr. Newton; en effet l'on a fait voir dans l'Introduction que cette hypothèse est insuffisante pour en expliquer les principaux phénomènes, & qu'elle est, outre cela, sujette à beaucoup d'autres difficultés qui la rendent tout-à-fait insoutenable.

On voit de-là que le nombre des coups d'air qui viennent frapper nos organes, doit nécessairement répondre au nombre des vibrations des particules des corps sonores. Donc puisque dans les cordes de Musique la durée de leurs vibrations ne dépend que de leur nature, & nullement des ébranlemens extérieurs, on a la raison pour laquelle chaque corde rend généralement toujours le même ton quelle que soit la manière avec laquelle on la mette d'abord en vibration, ce ton ne dépendant que de la grosseur, de la longueur, & de la tension de la corde, comme on le savoit déjà d'après la seule expérience. On appliquera encore le même raisonnement au flutes, dont les mouvemens ont été prouvés semblables à ceux des cordes vibrantes. Et si on veut juger par analogie, on pourra l'étendre à tous les autres corps sonores qui ont lieu dans la nature, & dont les oscillations ne paroissent pas susceptibles d'une juste estimation analytique.

56. Mais pour retourner à notre formule: l'on a posé (art. 35.) $H = \sqrt{\left(\frac{2 E h}{s a}\right)}$, par conséquent on aura $H a$

m

$=$

$= \sqrt{\left(\frac{2Eah}{S}\right)}$; & faisant les mêmes suppositions de l'art. 52, on trouvera $Ha = \sqrt{2nkh}$; par ce moien on aura $\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = \zeta + 2sa$; $\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(2X + \zeta + 2sa)$, d'où l'on tire par la différentiation $\pm \frac{dt\sqrt{2nkh}}{T} = \pm d\zeta$, savoir $\pm \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\sqrt{2nkh}}{T}$, qui est l'expression de la vitesse absolue du son, soit qu'il se propage de C vers B , ou de C vers A .

On peut évaluer cette expression comme dans l'art. cité; mais afin de la pouvoir plus commodément comparer avec les formules déjà connues, il sera utile de la réduire aux mesures ordinaires des oscillations des pendules. Soit l la longueur du pendule simple isocrone, qui fait une oscillation dans le tems T ; l'on fait qu'un corps pesant parcourt un espace $\frac{l}{2}$ dans un tems qui est à T comme le diamètre du cercle est à la circonférence; on aura donc ce tems $= \frac{2T}{\pi}$, & comme les espaces parcourus en tombant sont comme les quarrés des tems, l'on aura de plus $h : T^2 = \frac{l}{2} : \frac{4T^2}{\pi^2}$, d'où l'on tire $h = \frac{\pi^2 l}{8}$, qui donnera $\pm \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\pi}{2T} \sqrt{nkl}$; c'est pourquoi l'espace parcouru par le son dans le tems T d'une oscillation du pendule l fera $= \frac{\pi}{2} \sqrt{nkl}$. Il est à remarquer en premier lieu que la longueur a de la fibre aérienne ne se trouve plus dans cette formule de la vitesse du son, d'où il suit qu'elle doit toujours être la même, soit que le son se propage dans des lieux ouverts, où l'Atmosphère peut être

être considérée comme continuée à l'infini de toute part, soit qu'il se trouve renfermé dans des détroits quelconques, où les fibres aériennes ne peuvent être que d'une longueur donnée.

L'expérience est encore d'accord sur ce point de l'aveu de tous les Physiciens; mais il y a plus: la formule que nous venons de trouver est la même qui avoit déjà été donnée par Mrs. Newton, & Bernoulli, & dont les résultats se trouvent assés conformes à la vérité, quoique ces deux Auteurs l'aient tiré de Principes insuffisans, & même fautifs, comme on l'a fait voir au commencement de cette Pièce. Pour se convaincre de l'identité de ces formules nous n'avons qu'à nous rapeller la *Prop. 49.* de l'art. 4., où il est dit que le son doit parcourir un espace égal à la circonférence du cercle, dont le rayon est A , ou bien πk dans le tems qu'un pendule de même longueur fait une oscillation entière composée d'un allée & d'une revenue; donc puisque Mr. Newton suppose le mouvement du son uniforme, & que les tems des oscillations des pendules sont comme les racines quarrées de leurs longueurs, l'on aura l'espace $\frac{\pi \pi k}{2}$ parcouru par le son dans le tems d'une oscillation simple du pendule πk à l'espace qu'il parcourroit dans le tems d'une semblable oscillation du pendule l comme $\sqrt{\pi k} : \sqrt{l}$, d'où l'on tire cet espace $= \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi k l}$ tout de même comme on l'a trouvé par nôtre calcul.

57. Les résultats de cette formule étant assés connus, je ne crois pas devoir m'arrêter à les examiner. On fait effectivement qu'elle ne donne que 979 piés pour chaque seconde, au lieu que les expériences moiennes donnent un espace de 1142. Cette différence quoique assés grande en elle même ne monte néanmoins qu'environ à

une dixième de l'espace total. D'ailleurs Mr. Newton expose dans le scolie à la *Prop.* 49. du second Livre des Principes quelles peuvent en être les raisons; au reste il ne doit pas être étonnant que la théorie diffère tant soit peu de l'expérience à l'égard des quantités absolues; car on fait que les expériences toujours assez compliquées ne peuvent jamais fournir des données simples, & débarassées de conditions étrangères, telles que l'Analyse pure les demanderoit.

Mr. Euler a donné à la vérité dans les endroits cités dans l'Introduction une formule plus approchante du vrai qui est d'une espace $= 4\sqrt{nk\ell}$; ce qui revient à 1222 piés par seconde dans les plus grandes chaleurs, & à 1069 dans les plus grands froids. Mais comme cet Auteur n'a pas laissé voir l'Analyse qui l'a conduit à ce résultat nous ne pouvons porter aucun jugement la dessus. Je remarquerai seulement que Mr. Euler suppose, sans le démontrer, que chaque globule d'air subisse des dilations & des contractions successives qui se communiquent, suivant les lois de la communication du mouvement, aux particules contenues dans la même fibre avec une vitesse constante; & la même pour tous les sons soit forts, soit foibles [voies la Thèse citée, art. 52., où il a donné pour la première fois la formule qu'il a ensuite répété dans la Dissertation du Feu] ce qui peut servir, pour le dire en passant, à faire voir de combien notre théorie doit être préférable, malgré son inexactitude sur ce point.

De la réflexion du son, ou des Echos.

18. **N**ous avons trouvé dans le chapitre précédent que les lois de la propagation du son sont contenues dans les deux formules générales.

$$\pm \frac{t\sqrt{2\pi kh}}{T} = \zeta + 1sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2\pi kh}}{T} = -(\zeta + 1X + 1sa)$$

Or il y a ici trois cas à distinguer. 1^{mo} Quand l'air est tout-à-fait libre ce qui donne $a = \infty$, & $X = \infty$; 2^{de} Quand l'air n'est libre que d'un côté, par exemple quand il y a au point *A* de la fibre aérienne un obstacle invincible qui lui sert d'appui; dans ce cas l'on aura de même $a = \infty$, mais l'*X* qui est égal à *AC* sera fini, puisqu'il dénote la distance du corps sonore à l'obstacle qui est en *A*; 3^o Quand les fibres de l'air sont terminées des deux côtés par des obstacles inébranlables aux extrémités *A* & *B*. L'on aura dans ce cas *a* fini, & égal à la distance des deux obstacles, & *X* sera de même fini, & exprimera la distance du corps sonore au premier obstacle *A*.

Examinons avec soin ces cas l'un après l'autre. Soit en premier lieu $a = \infty$, & $X = \infty$, *X* sera un infini moindre que *a*, parce qu'on doit toujours regarder la fibre comme infinie de part & d'autre du point *C*; ainsi l'on aura $X = \frac{a}{2}$, & les deux équations ci-dessus deviendront

$$\pm \frac{t\sqrt{2\pi kh}}{T} = \zeta + 1sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2\pi kh}}{T} = -(\zeta + [1s + 1]a).$$

Il est visible que, a étant infini, le tems t n'obtiendra des valeurs finies que dans la première de ces équations, & dans le cas de $s = 0$; car l'on a ici $\pm t = \frac{T\zeta}{\sqrt{2nkb}}$, où l'alternative des signes est nécessaire afin que le tems t puisse toujours être positif soit que ζ soit positif, ou négatif. Donc il n'y aura dans ce cas qu'un instant donné, dans lequel chaque particule soit ébranlée; d'où il s'ensuit que dans l'air tout-à-fait libre le son sera unique, & qu'on cessera de l'entendre dès que le corps sonore aura fini ses vibrations.

59. Supposons en second lieu a infini & X fini, on tirera des valeurs finies de t des deux formules générales en posant $s = 0$; la première nous donnera $\pm t = \frac{T\zeta}{\sqrt{2nkb}}$; & la seconde $\pm t = -\frac{T(\zeta + 2X)}{\sqrt{2nkb}}$. Chaque particule sera donc ébranlée deux fois de suite; le premier ébranlement arrivera comme dans le cas précédent, le second lui succédera après un intervalle de tems fini, qui dépendra des deux distances X & ζ . Donc quand il se trouve un obstacle quelconque qui peut terminer les fibres aériennes d'un côté, il se formera une répétition du même son, laquelle sera distinguée du son primitif si l'intervalle du tems entre l'un & l'autre ne se trouvera pas moindre d'une quinzième de seconde, qui est le moindre espace requis pour que l'oreille puisse apercevoir distinctement deux sons successifs.

Pour mesurer au juste cet intervalle, on distinguera deux cas, lorsque ζ est positif, & lorsqu'il est négatif. Dans le premier on aura $t = \frac{T\zeta}{\sqrt{2nkb}}$, & $t = \frac{T(\zeta + 2X)}{\sqrt{2nkb}}$, dont la différence est $\frac{2TX}{\sqrt{2nkb}}$; dans le second on aura de même t

$$= \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}} ; \text{ \& l'autre valeur sera } t = \frac{T(2X-z)}{\sqrt{(2nkb)}} \text{ dont}$$

la différence se trouvera $= \frac{2T(X-z)}{\sqrt{(2nkb)}}.$

Cette différence sera donc dans le premier cas égale au tems que le même son met à parcourir un espace $= 2X$; & dans le second égale au tems qu'il lui faudroit pour parcourir l'espace $= 2X - 2z$. Or comme le son qui part du point *C* (Fig. 15.) se propage de part & d'autre, l'on concevra clairement la formation du son répété, si on imagine que celui qui est propagé vers *A*, soit pour ainsi dire réfléchi par le point *A*; & qu'il retourne en arrière avec la même vitesse; ainsi lorsque *z* est positif, & que l'oreille est en *D* de l'autre part de l'obstacle, elle recevra premièrement l'impression du son qui a parcouru l'espace *CD* ensuite elle sera de nouveau frappée par un semblable son qui aura parcouru l'espace *CA + AD*, savoir $2CA + CD$ ce qui donne précisément, pour la différence des tems, un tems proportionel à l'espace $2CA = 2X$. Au contraire si *z* est négatif, & que l'oreille soit placée en *D'* entre le corps sonore, & l'obstacle, ce sera le même son qui part de *C* vers *A* qui se fera entendre deux fois, le premier tems repondra à l'espace $CD = z$; & le second à l'espace $CA + AD = 2X - z$, dont l'intervalle repond au juste à l'espace $2X - 2z$.

Le phénomène de la répétition du même son est un des plus connus dans la nature; on l'appelle ordinairement *Echo*, & on voit en effet qu'il est produit par des obstacles quelconques qui interceptent le son, & l'obligent pour ainsi dire à rebrousser chemin, tels sont par exemple les montagnes, les bois épais, les rochers, les cavernes, & même les nuées qui se trouvent à côté des corps sonores.

60. Mais achevons l'examen des nos formules, & passons au troisième cas, où a & X sont deux quantités finies. Il est d'abord évident que les deux équations nous donneront ici une infinité de valeurs pour le tems t qui répondront à autant d'instans, où une même particule d'air sera remuée. Pour les développer supposons successivement $s = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$ &c. on tirera de la première équation

$$\pm t = \frac{T\zeta}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(\zeta + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(\zeta - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(\zeta + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm \text{ \&c.}$$

& ainsi de suite

La seconde nous donnera

$$\pm t = \frac{-T(\zeta + 2X)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(\zeta + 2X + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(\zeta + 2X - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(\zeta + 2X + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm \text{ \&c.}$$

On conclut de-là que quand les fibres sonores de l'air sont terminées des deux côtés par des obstacles immobiles, qui en appuient & soutiennent les extrémités, il doit pour lors y avoir une infinité de répétitions du même son, savoir

savoir un Echo composé qui dureroit toujours si la constitution de ces fibres ne pouvoit jamais être altérée. Pour connoître la progression des tems, au bout desquels doit se faire une des répétitions, nous remarquerons que chacun des tems t dans les équations précédentes, est égal au tems que le son emploie à parcourir les espaces correspondans $z, z + 2a, z - 2a, \&c. z + 2X, z + 2X + 2a, z + 2X - 2a \&c.$ Donc si l'on considère toujours ces espaces positifs, on pourra les représenter par les parties de la ligne AB de la manière suivante.

1.^{re} Série.

CD

$CB + BA + AD$

$CA + AB + BD$

$CB + BA + AB + BD$

$CA + AB + BA + AD$

& ainsi de suite.

2.^{de} Série.

$CA + AD$

$CA + AB + BA + AD$

$CB + BD$

$CB + BA + AB + BD$

& ainsi de suite.

Si l'on conjoint ces deux séries, on en tirera ces deux-ci

CD

$CB + BD$

$CB + BA + AD$

$CB + BA + AB + BD$

&c.

$CA + AD$

$CA + AB + BD$

$CA + AB + BA + AD$

&c.

La nature & l'arrangement des termes qui composent ces progressions, fait assés connoître comment le même son qui part du corps sonore qui est en *C*, doit revenir plusieurs fois frapper l'oreille au même endroit *D*. Car on voit aisément que la première de ces dernières suites exprime le chemin du son propagé de *C* vers *B*, & réfléchi d'abord par l'obstacle *B*, ensuite par *A*, & de nouveau par *B*, & ainsi à l'infini. Au contraire la seconde exprime de même les lois des allées, & revenues du son, qui partant du même endroit *C* se meut d'abord vers *A*, d'où il est ensuite porté vers *B*, & de-là de nouveau vers *A*, & ainsi alternativement. Et ces deux sons achèvent pour ainsi dire leurs mouvemens dans le même espace *AB*, & dans le même tems sans se troubler, ou s'entrepêcher en aucune façon dans leurs rencontres. Donc toutes les fois que chacun d'eux passera par le même point *D*, on entendra dans cet endroit une répétition, ou bien un écho du son primitif.

C'est ainsi que se forment les échos composés qui répètent plusieurs fois le même son en différens tems, qui ne sont pas toujours égaux entr'eux, selon que le corps sonore, & le point d'où l'on veut entendre l'écho se trouvent différemment placés sur la ligne qui joint les deux obstacles.

61. Les Physiciens rapportent quelques exemples de ces échos composés, entre lesquels il en est qui répètent le même son plus de cinquante fois de suite, & on observe toujours qu'ils sont produits par des murs ou des rochers, ou des autres obstacles quelconques situés presque vis-à-vis. La plupart d'entr'eux ont cru pouvoir expliquer ces phénomènes par la théorie de la réflexion; car disent-ils, les particules de l'air qui est en vibration rencontrant des obstacles invincibles sont réfléchies à peu près comme l'on conçoit que le sont les rayons de la lumière

par les surfaces unies des miroirs ; & cette explication paroît d'autant plus plausible , qu'on trouve en effet par expérience que l'intervalle du tems écoulé entre deux sons consécutifs , est précisément tel qu'il le faut pour que le son principal puisse être réfléchi par les obstacles donnés , & revenir à l'oreille.

Cependant à examiner la chose à fond , on sera obligé de convenir que le Principe de la réflexion , comme on la conçoit ordinairement dans le choc des corps , ou dans la lumière , est ici un Principe tout-à-fait illusoire . Car l'expérience nous montre que l'écho ne dépend en rien du poli de la surface réfléchissante , puisque il arrive que des surfaces en apparence polies ne produisent point d'écho , au lieu qu'on l'entend souvent dans des lieux remplis de mille inégalités . En effet comment concevoir que des rochers , des forets , des nuées soient propres à produire dans l'air une réflexion semblable à celle des rayons de la lumière sur les miroirs . Rien donc n'est moins fondée que cette Catoptrique des sons que l'on a inventé pour rendre raison des propriétés de l'écho . Mr. D'Alembert est , peut-être , le premier qui aie senti l'insuffisance de cette théorie , dans l'Encyclopédie au mot *Echo* ; mais ni lui , ni aucun autre que je sache n'a jamais entrepris de donner des explications plus fondées de ce phénomène .

La théorie que nous venons de déduire de nos formules est , ce me semble , tout-à-fait à l'abris de ces difficultés ; car il ne faut autre chose pour produire l'écho , si non que les extrémités des fibres aériennes sonores trouvent un appui fixe , de quelque nature qu'il soit ; s'il n'y a qu'un obstacle d'un côté le son ne sera renvoyé qu'une fois ; c'est l'écho simple . S'il y en a deux qui terminent la fibre de part & d'autre les sons seront renvoyés réciproquement , ce qui formera des échos composés qui dureront autant que la constitution des fibres so-

nore pourra subsister ; si donc ces sortes d'échos durent plus, ou moins, ce sont toujours quelques circonstances extérieures qui en sont cause. Mais dira-t-on, pourquoi n'entend-on pas d'écho toutes les fois que l'air est renfermé entre quelques obstacles. Les Physiciens ont déjà répondu à cette difficulté en faisant voir qu'il faut une certaine distance entre le point, d'où l'on veut entendre l'écho, & l'obstacle qui doit le renvoyer, de même qu'entre le corps sonore, & cet obstacle, afin qu'on puisse le distinguer du son primitif. Sans cela le son réfléchi se confond entièrement avec le direct, & ne fait qu'en augmenter la force, comme on l'observe tous les jours. Il faut de plus que l'espace que l'écho doit parcourir ne soit embarrassé par aucun corps qui en empêche la propagation. Lorsque ces conditions auront lieu je ne doute pas qu'il n'y ait toujours des échos ; la construction des échos artificiels est appuyée sur ces seuls Principes.

CHAPITRE III.

Du mélange, & du rapport des sons.

62. **J**E n'ai traité jusqu'ici de la propagation du son que dans le cas qu'il n'y ait qu'un seul corps sonore qui communique ses vibrations aux parties contigues de l'air ; il nous reste à voir si les lois trouvées ont de même lieu quand plusieurs sons sont excités en même tems dans divers endroits, & en quelle manière ces sons peuvent se répandre dans le même espace sans se troubler, ou se confondre en aucune façon, comme nous le montre l'expérience journalière.

Sup.

Concevons donc dans la même fibre aérienne sonore AB (Fig. 16.) divers points physiques C, C', C'' , qui soient frappés en même tems par des corps sonores, qui diffèrent les uns des autres comme on voudra; soient représentées par c^I, c^{II}, c^{III} &c. les impulsions, où les vitesses communiquées à ces points, & que X^I, X^{II}, X^{III} &c. désignent leurs distances AC, AC', AC'' &c. de la première extrémité donnée A , on trouvera pour la vitesse u d'un point quelconque D de la même fibre qui est éloignée de A par l'intervalle $AD = x$, l'expression générale suivante.

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{2c^I}{m} \left(\sin. \frac{X^I \pi}{2a} \times \sin. \frac{x \pi}{2a} \times \cos. \frac{tH\pi}{2T} \right. \\
 & + \sin. \frac{2X^I \pi}{2a} \times \sin. \frac{2x \pi}{2a} \times \cos. \frac{2tH\pi}{2T} \\
 & + \sin. \frac{3X^I \pi}{2a} \times \sin. \frac{3x \pi}{2a} \times \cos. \frac{3tH\pi}{2T} \\
 & + \text{\&c. à l'infini}) \\
 & + \frac{2c^{II}}{m} \left(\sin. \frac{X^{II} \pi}{2a} \times \sin. \frac{x \pi}{2a} \times \cos. \frac{tH\pi}{2T} \right. \\
 & + \sin. \frac{2X^{II} \pi}{2a} \times \sin. \frac{2x \pi}{2a} \times \cos. \frac{2tH\pi}{2T} \\
 & + \sin. \frac{3X^{II} \pi}{2a} \times \sin. \frac{3x \pi}{2a} \times \cos. \frac{3tH\pi}{2T} \\
 & + \text{\&c. à l'infini}) \\
 & + \frac{2c^{III}}{m} \left(\sin. \frac{X^{III} \pi}{2a} \times \sin. \frac{x \pi}{2a} \times \cos. \frac{tH\pi}{2T} \right. \\
 & + \sin. \frac{2X^{III} \pi}{2a} \times \sin. \frac{2x \pi}{2a} \times \cos. \frac{2tH\pi}{2a} \\
 & + \sin. \frac{3X^{III} \pi}{2a} \times \sin. \frac{3x \pi}{2a} \times \cos. \frac{3tH\pi}{2a} \\
 & + \text{\&c. à l'infini}) \\
 & + \text{\&c.}
 \end{aligned}$$

Or

On ramènera ces expressions à la forme de celles de l'art. 54., & il viendra, comme il est aisé de le voir, une suite de formules semblables entr'elles, & semblables à celle qu'on a trouvée pour le cas d'une seule impulsion donnée c . Or afin de connoître ce qui arrivera, lorsque une même particule d'air sera ébranlée par plusieurs sons divers, il faut chercher la valeur d' u au moment de l'ébranlement, & en suivant le même procédé qu'on a enseigné, art. cité, on trouvera que chacune des expressions qui composent la valeur générale de u , se réduira à $\pm c^1$, $\pm c^{11}$, $\pm c^{111}$ &c., selon que le tems t répondra aux formules $\frac{X^1}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$; $\frac{X^{11}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$; $\frac{X^{111}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$ &c., où il est à remarquer que l'alternative des signes des quantités c^1 , c^{11} , c^{111} &c. doit répondre exactement à celle des quantités $\frac{x}{a} + 2s$.

On voit de-là que lorsqu'il n'y a qu'une de ces équations qui soit vérifiée, u retient la même valeur c qu'il a eu au commencement; mais quand plusieurs ont lieu dans même tems, la valeur d' u devient composée des premières valeurs c^1 , c^{11} , c^{111} &c. Donc puisque chacune des équations répond, pour ainsi dire, à chacun des sons particuliers propagés ensemble, cette propagation se fera toujours de la même manière par rapport à chacun d'eux, comme s'il eut été seul, & il se communiquera d'une particule à l'autre la même impulsion qui a été produite par le corps sonore; par conséquent lorsque deux, ou plusieurs sons se rencontreront, la particule d'air qui se trouve dans leur point de rencontre recevra une impulsion composée des impulsions particulières qui constituent la nature de chacun d'eux; & passé ce moment, ils continueront.

nueront leur chemin comme auparavant, tout de même comme on a vu qu'il arrive dans les échos composés.

63. Nous avons donc trouvé dans nos formules le développement d'un des principaux points de la théorie du son, qui regarde la manière, avec laquelle l'air est capable de transmettre à l'oreille sans mélange les impressions de plusieurs sons différens. Cette vérité qui est une des plus connues par expérience a cependant embarrassé si fort les Physiciens jusqu'à présent, que les plus habiles ont été obligés de recourir à des systèmes pour en rendre raison. Les principaux se réduisent à deux; celui du mélange des vibrations isocrones proposé par Mr. Daniel Bernoulli; & celui de la différente élasticité des particules de l'air inventé par Mr. De-Mairan. Pour ce qui est du premier nous en avons vu l'insuffisance dans le Chap. V. A l'égard de l'autre il suffira de remarquer que la différente nature des particules de l'air ne peut influer que sur la vitesse du son, comme il résulte de la formule donnée (art. 56.); mais que pour ce qui est de leur ébranlement, il ne dépend que de la nature du corps sonore, dont les parties frappent dans leurs oscillations indistinctement toutes celles de l'air contigu. On peut voir dans l'Article *Fondamental* de l'Encyclopédie les autres raisons qui rendent ces deux systèmes insoutenables, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

64. Nous venons de voir que la particule d'air qui se trouve dans la rencontre de deux sons, reçoit un ébranlement différent de celui qui est produit par chaque son en particulier; donc si les sons sont de telle nature que leurs vibrations concourent toujours après un certain tems donné, l'impression suivie & régulière de ces ébranlemens composés pourra être distinguée des autres impressions particulières, & une oreille assés exercée entendra un troisième son, dont le rapport avec les autres se trouvera en com-

comparant le nombre des vibrations particulières, que chacun d'eux achève entre deux concurrences successives. On devra donc entendre ce troisième son précisément au point de milieu de la ligne qui joint les deux corps sonores, parceque les sons aiant toujours une même vitesse, c'est là qu'il doivent nécessairement se rencontrer; cependant si l'on considère la masse continue de l'air, on voit que chaque particule d'une fibre sonore doit être considérée comme le centre d'une infinité d'autres fibres, auxquelles elle peut aussi communiquer du mouvement, ce qui fait que le son se propage en tous sens; d'où il suit que l'ébranlement composé, pourra être de même porté à l'oreille dans une infinité d'autre endroits; quoique avec moins de force & moins distinctement à cause de la diminution & de l'altération causée par les résistances des particules éthérogènes, dont toute la masse de l'air est parsemée.

Comme il faut une extrême finesse d'oreille pour percevoir ces sons composés, aussi n'y a-t-il que quelques uns des plus habiles Artistes qui les aient reconnus. Mr. Tartini est le premier, que je sache, qui se soit attaché à les examiner avec soin, comme on peut le voir dans son *Traité de Musique* imprimé à Padoue l'année 1754. Ce célèbre Auteur nous apprend qu'en tirant d'un même instrument capable de tenue, comme les violons, les trompettes &c. deux sons à la fois, ou bien en les tirant de deux instrumens éloignés l'un de l'autre de quelques pas, l'on en entend un troisième qui est d'autant plus sensible, qu'on se rapproche de plus du point de milieu de l'intervalle donné.

Après beaucoup d'expériences sur ce sujet Mr. Tartini conclut que si l'on considère la suite des fractions $\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c., & qu'on ajuste autant de sons qui

aient

aient le même rapport entr'eux, que les termes de cette suite, deux sons voisins quelconques produiront toujours, pour troisième son, le premier son qui répond au terme $\frac{1}{2}$. Or en examinant la concurrence des vibrations de tous ces sons, on trouve, qu'elle ne peut avoir lieu qu'après un nombre de vibrations égal aux dénominateur de la fraction qui exprime les sons correspondans ; ainsi les deux sons exprimés par $\frac{1}{5}$, & par $\frac{1}{6}$ ne deviennent concurrens, qu'après cinq vibrations du premier & six du second, & ainsi des autres ; d'où il s'ensuit qu'en comparant le nombre des concurrences au nombre des vibrations de chaque son particulier, le troisième son produit par deux de la série précédente devoit toujours être exprimé par 1, ce qui donne proprement l'octave de celui qui est résulté à Mr. Tartini. Mais l'on sait que la différence entre un son, & son octave est souvent insensible à l'oreille, par la facilité naturelle que nous avons de les confondre ensemble ; donc si l'on substitue au troisième son de Mr. Tartini son octave au dessous, les résultats de ces expériences deviendront en tout conformes à ceux que nous donne notre théorie. L'on doit être d'autant plus porté à admettre cette échange d'un son dans son octave, que Mr. Serre dans son Ouvrage sur les Principes de l'Harmonie de 1753. en faisant mention des expériences de Mr. Tartini, nous rapporte, que les troisièmes sons produits par des tierces majeures, & mineures, se trouvent précisément à l'octave basse de ceux de Mr. Tartini.

Nous avons parlé plus haut de l'expérience des *battemens* de Mr. Sauveur, & nous avons vu qu'ils répondent exactement aux concurrences des vibrations ; il y a donc

donc tout lieu de croire qu'ils sont de même formés par la rencontre de deux sons, & qu'ainsi leur explication dépend entièrement de la théorie que nous venons de donner; Il est donc vraisemblable que le troisième son de Mr. Tartini n'est produit, que par une suite de *battemens*, & dans ce cas il est très aisé de reconnoître, que le troisième son doit avoir avec les deux sons primitifs le rapport que nous avons ci-dessus établi.

Ce seroit ici le lieu d'examiner la nature, & la source des consonances, & des dissonances; mais il faut avouer que, malgré les efforts de plusieurs habiles Musiciens, on n'est pas encore parvenu à établir la-dessus des fondemens constans, & généraux; Mr. Sauveur est dans l'idée qu'un accord plaît d'autant plus à l'oreille que ses *battemens* sont plus fréquens, & qu'ils restent pour cela moins sensibles; d'où il suit, que les accords consonans doivent être précisément ceux dont les vibrations sont les plus concurrentes, & qu'au contraire les accords deviennent dissonans, lorsque la concurrence des vibrations est telle, qu'elle peut aisément être apperçue de l'oreille. Mr. Tartini tire aussi de ses expériences du troisième son plusieurs conséquences pour la nature de l'Harmonie. Il prétend que le troisième son est toujours la vraie basse dont les sons particuliers sont les dessus; & c'est sur cela qu'il a principalement fondé son système de Musique. Quoique il en soit il est au moins certain par ce que venons de démontrer, que de quelque façon qu'on prenne la chose, la concurrence des vibrations en est toujours le fondement, quoique présenté sous des points de vue différens; nous verrons encore ci-après, que le Principe de l'Harmonie qu'on prétend trouver dans la nature même des corps sonores revient encore à celui-ci.

Lors-

65. Lorsque les parties des corps sonores sont ébranlées, l'air reçoit autant d'impressions successives, que ces parties font de vibrations, & ces impressions se répandent par tout sans se multiplier, ou se troubler en passant d'une particule d'air dans l'autre. Donc si le corps sonore est de telle nature, que les vibrations de ses parties commencent toutes, & s'achèvent toujours dans le même tems, l'oreille sera frappée à la fois par plusieurs petits coups, qui se succéderont par des intervalles de tems égaux, & cette uniformité d'impressions produira ce sentiment agréable qu'on appelle *Son*; au contraire si les vibrations des parties du corps sonore diffèrent les unes des autres, c'est à dire qu'elles ne soient pas toutes d'égale durée, notre organe recevra à chaque instant des ébranlemens différens, & on n'entendra dans ce cas qu'un bruit confus. Cette vérité qui a été de long-tems reconnue est une suite nécessaire de ce que l'on a démontré sur les mouvemens des cordes vibrantes, & sur ceux des fibres élastiques d'air; car on éprouve tous les jours que les cordes, qui produisent les meilleurs sons sont toujours celles qui ont une plus grande uniformité dans toute leur extension, ce qui les rend plus capables des mouvemens réguliers, & isochrones, que nous avons déterminé dans le Chap. VII. Ainsi l'explication du son, & du bruit que quelques Auteurs ont voulu donner en disant que tout bruit est *un*, & qu'au contraire tout son est *composé*, tombe ici d'elle même, puisqu'elle est tout à fait opposée à ce que nous venons de démontrer.

Supposons à présent, que pendant qu'une corde résonne il y ait près d'elle plusieurs autres cordes tendues, il est clair que l'air ébranlé par la première frappera toutes les autres, & que les impulsions reçues par celles-ci répondront parfaitement à chaque une des vibrations de celle qu'on

fait résonner ; donc a force de coups réitérés, elle devront de même entrer en vibration ; or puisque la durée des vibrations des cordes est absolument déterminée par la constitution de la corde même, il s'ensuit que si toutes les cordes sont de même nature, les vibrations naissantes de celles qui sont ébranlées par l'air pur, seront toujours favorisées par des impulsions continues qui procèdent de la corde principale ; c'est pourquoi au bout d'un certain tems elles seront aussi forcées de résonner. Au contraire si les cordes sont telles, que leurs vibrations ne puissent jamais être concurrentes, elles seront tantôt favorisées, & tantôt troublées par les impulsions qui procèdent de la corde principale, & ainsi il sera impossible, qu' elle reçoivent jamais un mouvement sensible, & capable de produire le son qui leur est propre. Supposons à présent que les cordes tendues ne soient pas à l'unisson de celle qu' on fait résonner, mais qu' elles y répondent comme nombre à nombre, il faudra ici distinguer deux cas ; lorsque le son de la corde principale est mesuré exactement par ceux des autres cordes, & lorsque ces sons sont seulement commensurables entr' eux. Il est visible que dans le premier de ces cas, les vibrations des cordes qu' on laisse en repos, seront toujours favorisées par celles de la corde principale qu' on ébranle, & par conséquent ces cordes devront de même résonner comme si elles étoient à l'unisson ; dans l' autre cas les cordes ne pourront résonner dans leur totalité ; car elles seront toujours en partie troublées, & en partie favorisées par les vibrations de la principale ; & comme les impulsions contraires, & favorables sont toujours uniformes, elles les forceront de prendre des figures telles, que leurs vibrations puissent toujours être favorisées. Il faudra donc qu' elles se divisent en plusieurs ventres égaux, de sorte que le son de chacun de

de ces ventres soit où à l'unisson de celui de la corde principale, où bien, qu'il le mesure toujours exactement comme dans le premier cas. Or puisque il n'y a rien qui rétienne fixes les noeuds formés par les ventres naturels de ces cordes, il arrivera facilement que les vibrations particulières se dérangent les unes les autres, ce qui en détruira l'uniformité, & empêchera par conséquent les cordes de résonner; elle ne feront donc que frémir au son de la principale, & se diviseront, en frémissant, par une espèce d'ondulation, comme on le voit dans les sons harmoniques.

Ce Phénomène a été observé par Mrs. Wallis, & Mersenne les premiers, & puis par Mr. Sauveur dans la dissertation citée (art. 50.). Tout le monde le reconnoît aujourd'hui; & on convient généralement, que l'air ébranlé par les oscillations d'une corde est celui qui met les autres en mouvement, mais il restoit encore à donner la raison pourquoi, de plusieurs cordes frappées également par les mêmes coups d'air il n'y a que les harmoniques qui puissent résonner, où frémir simplement. C'est à quoi il me paroît d'avoir entièrement satisfait par tout ce qui a été démontré jusqu'à présent.

Je souhaiterois pouvoir expliquer de même la multiplicité des sons harmoniques, qui se font sentir en frappant une seule corde, tels que la douzième, & la dixseptième, au dessus du son principal. Mais j'avoue qu'après bien de réflexions, je ne suis pas encore parvenu à trouver sur ce sujet rien de satisfaisant. Ayant examiné avec toute l'attention dont je suis capable, les oscillations des cordes tendues, je les ai toujours trouvés simples, & uniques dans toute leur étendue, d'où il me paroît impossible de concevoir comment divers tons peuvent être engendrés à la fois. Il seroit pour cela inutile de recourir aux théo-

ries

ries dont on a fait mention (art. 63.) puisque nous en avons déjà fait sentir le défaut. Je suis donc enclin à croire que ces sons peuvent être produits par d'autres corps qui résonnent au bruit du son principal, comme on vient de le voir dans les cordes; & ce qui peut donner quelque poid à cette conjecture, c'est que ce mélange de sons harmonieux n'est guère sensible, que dans les Claveciens, ou dans les autres instrumens montés de plusieurs cordes.

Quoique il en soit je désirerois que des personnes dont l'oreille fût extrêmement fine, & qui ne l'eussent pas beaucoup exercé à entendre de la Musique, voulussent bien se prendre la peine de répéter ces expériences sur une seule corde fixée par deux chevalets sur une simple table, dans des lieux ouverts de toute part; dans ce cas l'on pourroit être sûr, que ni la prévention de l'oreille acoutumée à entendre toujours les sons principaux accompagnés de leurs harmoniques, ni la résonnance des corps circonvoisins ne pourroit y avoir aucune part; & le résultat de l'expérience deviendroit hors de toute atteinte.

Mr. Rameau, un de plus célèbres Artistes de nos jours, & à qui l'art Musical est si redevable, a donné en 1750. une démonstration du Principe de l'Harmonie fondée sur les expériences rapportées de la résonnance des corps sonores. Cet Auteur croit avoir ainsi découvert dans la nature même les vrais fondemens de l'Harmonie, qu'on avoit avant lui inutilement cherché par d'autres voies; mais après tout ce que nous venons de démontrer on voit évidemment que ce Principe même tire son origine de celui de la concurrence des vibrations, Principe dès longtems reconnu pour la source des consonnances, & des dissonances; & sur lequel Mr. Euler a établi sa nouvelle théorie de Musique dans le Traite cité (art. 52.)

Ce

Ce célèbre Géomètre a donné en effet à ce principe toute l'étendue, dont il paroît capable, & il a tâché par là de ramener à des formules affés simples, les principales règles de la Composition. L'on ne doit donc plus regarder le principe de Mr. Rameau que comme une nouvelle preuve de celui-ci tirée immédiatement de l'expérience; mais cet Auteur aura toujours le mérite d'avoir sçu en déduire avec une extrême simplicité la plupart des loix de l'Harmonie que plusieurs expériences détachées, & aveugles avoient fait connoître.

Au reste quelque principe qu'on adopte pour développer la nature des consonances, & des dissonances il restera toujours à expliquer pourquoi il n'y a d'autres rapports primitifs consonans que ceux qui sont contenus dans les nombres 1, 3, 5; car il est certain qu'une corde qui fera la septième partie, ou bien septuple d'une autre devra résonner dans le premier cas, & frémir seulement dans le second tout de même comme si elle rendoit une douzième, ou une disseptième, d'où il s'ensuit, que suivant même le Principe de Mr. Rameau on devroit regarder le rapport de 4 : 7, ou bien de 7 : 8 pour consonans, ce qui est néanmoins démenti par l'expérience. Mais ce qui est plus étonnant c'est, que le rapport de 8 : 9 qui constitue une seconde majeure, est beaucoup moins dissonant que celui de 7 : 8, quoique les concurrences soient plus fréquentes dans celui-ci, que dans l'autre. Il y a la même question à faire sur plusieurs accords, qui ne sont pas reçus dans l'Harmonie, quoique ils contiennent moins de dissonances que d'autres, qu'on emploie avec succès. Je crois, que dans quelque système de Musique, que l'on veuille imaginer, l'on ne pourra éluder ces difficultés qu'en recourant au goût, & au sentiment commun sur lesquels l'habitude, & les préjugés ont peut être beaucoup plus de pou-

pouvoir, qu'on ne le pense ordinairement. Mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans des telles discussions. Le savant Mr. D'Alembert en a traité fort au long dans l'Article *fondamental* de l'Encyclopédie, auquel nous nous contenterons de renvoyer.



REFLE.

REFLEXIONS¹¹³

SUR LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

1. **O**N rencontre si souvent des quantités imaginaires dans les expressions algébriques qu'il seroit à souhaiter qu'on se fut attaché à en examiner avec plus de soin la nature & l'origine. Ces recherches auroient été d'un grand secours dans toutes les parties de Mathématiques qu'on traite par le calcul, & on auroit évité par là beaucoup de paradoxes & de contradictions dans une Science qui en devroit être entièrement exempte. La nature du calcul introduit en effet presque toujours dans la solution d'une question, des cas qui lui sont étrangers, & le problème alors quoique possible conduit à des équations, dont plusieurs racines peuvent être imaginaires: souvent même une formule qui paroïssoit devoir satisfaire entièrement à la question, nous la présente dans certaines circonstances d'une façon absurde & impossible: nous en verrons des exemples frappans dans la suite. Du reste le premier cas n'a d'autre inconvénient que la difficulté de débarasser l'équation de ces valeurs imaginaires; mais dans le second on pourroit facilement être induit en erreur par ces formules, & regarder comme impossible une question, dont toute la contradiction consiste dans la manière, dont on l'exprime algébriquement.

Souvent au contraire, parcequ'on ne peut faire entrer dans l'expression analytique d'un problème toutes les conditions qui lui appartiennent, l'algèbre nous en fournit une solution réelle pour des cas où ces conditions le rendent impossible. J'en pourrois apporter beaucoup d'exemples;

P

mais

mais cette matière d'ailleurs étrangère à mon sujet, ayant été suffisamment traitée par d'autres, & particulièrement par Mr. D'Alembert dans l'Encyclopédie à l'article *Equation*, où l'on trouvera des réflexions neuves & intéressantes, je passe à examiner avec plus de soin l'origine des racines imaginaires qu'on trouve dans les équations élevées.

2. Il est d'abord évident que si toutes ces racines sont imaginaires, le problème implique contradiction : mais s'il s'en trouve des réelles & des imaginaires, la question sera-t-elle en même tems possible & contradictoire ? éclaircissions ceci par un exemple. Qu'on se propose de trouver deux moyennes proportionnelles x & y entre les quantités a & b données ; les deux équations $x^2 = ay$, & $x^2 = y^2$ donneront en substituant dans la seconde la valeur de x prise dans la première $y = \pm \sqrt{bx \pm \sqrt{ay}}$, où l'on voit que l'ambiguïté des signes de $\pm \sqrt{ay}$ entraîne dans la formule deux valeurs imaginaires pour y exprimées par $y = \pm \sqrt{bx - \sqrt{ay}}$. Ces valeurs de y répondroient au cas où x seroit négatif, circonstance qui rendroit en effet le problème impossible.

Or comme en chassant les radicaux l'ambiguïté des signes évanouit, il est nécessaire que l'équation réduite contienne les deux cas de x positive & négative, & donne par conséquent des racines réelles & imaginaires pour y satisfaire également. Voilà de quelle manière la même équation appartient en même tems à un problème possible & à un impossible.

En suivant le même procédé on pourroit presque toujours reconnoître (principalement dans les problèmes géométriques) quelles sont les questions qu'on résoud malgré soi avec celle qu'on a en vuë, & on se persuaderoit aisément que puisqu'on n'introduit plusieurs valeurs pour l'inconnue dans l'équation finale que par la multiplication & l'élevation aux puissances, on pourroit de même

com-

combinaison de telle façon les opérations inverses qu'on trouva à part chaque valeur de x , qui devroit par conséquent toujours avoir une expression finie réelle, ou imaginaire.

3. Pour mettre hors de doute cette vérité qui a toujours été supposée par tous les Algébristes, Mr. de Bougainville dans son Introduction au calcul intégral, s'est servi de la considération d'une courbe; mais la démonstration qu'il en tire ne me paroît ni naturelle, ni assés rigoureuse: puisque la valeur imaginaire qu'il trouve par cette méthode n'étant qu'approchée, on pourroit soupçonner que la quantité que l'on néglige, quelque petite qu'elle soit, ne fût précisément celle qui empêcheroit qu'on ne pût exprimer l'inconnue par une expression finie: & l'on est d'autant plus porté à former ce doute, que comme il l'a lui même fait voir d'après Mr. D'Alembert, il arrive souvent qu'un terme qu'on croyoit pouvoir négliger dans une série, est cependant celui qui la fait changer de nature.

Quoiqu'il en soit, cette proposition, qui comme on l'a vu, paroît être une suite du procédé qui nous conduit aux équations de degré élevé, suffiroit pour démontrer ce théorème fameux: qu'une équation quelconque peut toujours être divisée en facteurs réels du second degré; car il s'en suivroit que quelque compliquée que fût une racine quelconque de cette équation, il ne s'agiroit toujours que de divisions ou d'extractions de racines. Or dans tous ces cas on pourra toujours par une simple construction géométrique réduire cette expression à la forme $A + B\sqrt{-1}$, où A & B sont des quantités réelles (voyez l'article 7.) : d'où il suit que puisque toute équation qui conduit à $x = A + B\sqrt{-1}$ doit donner également $x = A - B\sqrt{-1}$ (étant arbitraire de prendre les radicaux quarrés avec le signe $+$ ou $-$) l'équation proposée sera divisible par $x - A \pm B\sqrt{-1}$, & aura par conséquent encor pour facteur le produit réel $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$.

4. L'importance de ce théorème exigeroit cependant qu'on en eut une démonstration rigoureuse, tirée de la nature même des équations: d'autant plus qu'on mettroit en même tems hors d'atteinte la proposition de l'art. 3. Tel est le plan qu'a suivi Mr. Euler dans une excellente pièce qu'il a donné sur cette matière dans les Mémoires de l'Académie Royale de Prusse de l'année 1749. Voici la route qu'il a tenu. Qu'on réduise toutes les équations au degré 2^n ce qui est facile par la multiplication: cela fait il est évident qu'il suffiroit de démontrer généralement qu'une équation du degré 2^n est toujours divisible réellement en deux autres du degré 2^{n-1} ; car par la même raison chacune de celles-ci se diviserait en deux autres du degré 2^{n-2} , &c. en suivant ce raisonnement on auroit cette équation divisée en 2^{n-1} facteurs du second degré. Pour démontrer donc cette proposition, après avoir fait évanouir le second terme de l'équation, qui devient par là

$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-4} + \&c.$ où les coefficients $B, C, D \&c.$ sont en nombre 2^n-1 , qu'on suppose que les deux facteurs cherchés, soient

$$x^{2^{n-1}} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-4} + \&c.$$

$$\&c. x^{2^{n-1}} - \mu x^{2^{n-1}-2} + \nu x^{2^{n-1}-4} + \&c.$$

où le nombre des coefficients indéterminés est encore 2^n-1 . La comparaison du produit de ces deux équations avec la proposée fournit autant d'égalités, de façon que toutes les lettres $\alpha, \beta, \mu, \nu \&c.$ se pourront déterminer par les connues $B, C, D \&c.$ mêlées avec l'indéterminée u , réellement sans extraction de racine, ce qui donnera une équation pour u , dont l'exposant sera, comme on le fait par

les

les combinaisons
$$\frac{2^0 \times 2^1 - 1 \times 2^2 - 2 \times 2^3 - 3 \dots \times 2^{n-1} + 1}{1. 2. 3. 4. 5. \dots \dots \dots 2^{n-1}}$$

nombre que l'Auteur démontre pairement impair. De ce que le second terme manque dans l'équation, il conclut qu'une racine quelconque p aura toujours sa compagne $-p$, d'où il infère encore qu'on aura généralement pour facteur de cette équation $u^2 - p^2$: donc puisque le nombre des racines est pairement impair, le nombre de ces facteurs doubles sera impair, & par conséquent, dit-il, le dernier terme de cette équation sera négatif, ce qui suffiroit pour démontrer que u aura au moins deux valeurs réelles, ce qui rendroit aussi réels tous les coëfficiens α, β, μ, ν &c.

A l'égard de ce qu'on a dit qu'une racine p exige dans cette équation la $-p$, il ne paroît pas qu'on en puisse douter, puisque l'équation qui détermine u n'appartenant pas plus à la première qu'à la seconde des équations supposées, elle doit fournir indifféremment la valeur de $+u$ & de $-u$: d'où il est évident non seulement que le second terme manquera dans cette équation, mais aussi tous les termes pairs. Mais puisque p, p', p'', p''' &c. sont les racines de l'équation, dont quelques unes peuvent être imaginaires, & avoir un carré négatif, on ne peut pas conclure de ce que les facteurs $u^2 - p^2$ sont en nombre impair, que le dernier terme de leur produit soit essentiellement négatif. Il faudroit avant tout avoir démontré que le produit $p p' p'' p'''$ &c. de toutes les racines positives doit toujours être réel. Mr. Euler le trouve en effet tel pour les équations du quatrième degré; mais pour les autres cas il se contente de dire que ce produit étant déterminable par les coëfficiens C, D, E il ne peut être imaginaire. On sent bien qu'il faudroit encor qu'on fut assuré qu'il est égal à une fonction rationnelle de ces coëfficiens. Cette circonstance, sans laquelle le théorème ci-dessus perd toute sa force, me paroît assez difficile à démontrer. Pour cela cependant

dant je m'étois d'abord assuré que les racines de l'équation étant p, p', p'', p''' &c. il suffisoit de faire voir que si entre les combinaisons qu'on peut faire en prenant 2^{n-1} de ces quantités ensemble, on choisissoit seulement celles où entroit p , & qu'on les multiplia ensemble, cela donneroit exactement le produit $pp'p''p'''$ &c.; mais quoique ces produits se présentassent d'abord selon une loi assez simple, la difficulté que j'ai trouvée à les déduire généralement des coefficients de l'équation proposée m'a fait abandonner cette recherche, pour examiner si indépendamment des Principes que Mr. Euler avoit déjà établi, on ne pourroit point démontrer la proposition en question.

5. Si on a une équation quelconque du second degré $x^2 + Ax + B = 0$, dans laquelle A & B soient des quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, je dis que ses racines seront aussi de la forme $c + d\sqrt{-1}$, a, b, c, d étant des quantités réelles. Qu'on résolve l'équation proposée, on trouvera $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(-B + \frac{A^2}{4})}$: il est d'abord évident qu'on pourra réduire cette équation à $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$, g & h étant toujours des quantités réelles: on voit de plus que pour donner à cette expression la forme cherchée $c + d\sqrt{-1}$, il suffiroit d'y réduire le radical composé $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$. Pour cela dans un cercle, dont le rayon soit égal à $\sqrt{(g^2 + h^2)}$ qu'on cherche un angle ϕ , dont le sinus $= h$, & le cosinus $= g$, ce qu'il est facile de faire au moyen des tables. Le radical $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$ se changera ainsi en $\sqrt{(\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})}$ qui est égal à $\cos. \frac{\phi}{2} + \sin. \frac{\phi}{2} \sqrt{-1}$ ce que je prouve de la manière suivante.

Que ϕ & θ représentent deux angles quelconques si l'on multi-

multiplie $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$ par $\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1}$,
on trouvera pour produit $\cos. \phi \times \cos. \theta + \cos. \theta$
 $\times \sin. \phi \sqrt{-1} + \cos. \phi \times \sin. \theta \sqrt{-1} - \sin. \phi \times \sin. \theta$,
ou bien $\cos. \phi \times \cos. \theta + \sin. \phi \times \sin. \theta + (\cos. \theta \times$
 $\sin. \phi + \cos. \phi \times \sin. \theta) \sqrt{-1}$. Or l'on fait par les
Principes de la trigonométrie que $\cos. \phi \times \cos. \theta - \sin. \phi$
 $\times \sin. \theta = \cos. (\phi + \theta)$, & que $\cos. \theta \times \sin. \phi + \cos. \phi$
 $\times \sin. \theta = \sin. (\phi + \theta)$, on aura donc $(\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})$
 $\times (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1}) = \cos. (\phi + \theta) + \sin. (\phi + \theta)$
 $\sqrt{-1}$. Si à présent on fait $\theta = \phi$ la formule se réduira à
 $(\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})^2 = \cos. 2\phi + \sin. 2\phi \sqrt{-1}$,
d'où il suit évidemment que $\sqrt{(\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})}$
 $= \cos. \frac{\phi}{2} + \sin. \frac{\phi}{2} \sqrt{-1}$, puisqu'en élevant les deux
membres au quarré on a $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1} =$
 $\cos. \frac{2\phi}{2} + \sin. \frac{2\phi}{2} \sqrt{-1}$ équation identique. Si je prens
donc $m = \cos. \frac{\phi}{2}$ & $n = \sin. \frac{\phi}{2}$ j'aurai par la substitu-
tion $\sqrt{(g + h \sqrt{-1})} = m + n \sqrt{-1}$: expression qui
ajoutée, ou levée de la quantité $\frac{A}{2}$ donnera $x = c + d$
 $\sqrt{-1}$, comme on s'étoit proposé. Cette proposition pré-
paratoire à la principale que nous avons en vue pouvoit
se déduire directement du théorème général démontré par
Mrs. D'Alembert, & Euler; mais comme ils l'ont tiré
du calcul différentiel, j'ai cru devoir en donner ici une
démonstration plus simple, afin qu'une proposition qui ap-
partient entièrement à l'algèbre pure ne tint en aucune
façon à des Principes transcendans, & ne dépendit que
de la simple Géométrie.

Ce lemme posé: soit une équation d'un degré quelcon-
que r , dont on veuille trouver les facteurs trinomes. Qu'on
résolve le nombre r en ses facteurs simples, & on aura

$$r =$$

$r = 2^m . p . q . r . f . \&c.$ où les nombres $p, q, r, f, \&c.$ seront des nombres premiers, & par conséquent impairs. Donc le produit $p . q . r . f . \&c.$ sera un nombre impair que je nomme P .

Qu'on divise à présent l'équation proposée par une équation du second degré dont le coefficient du second terme, soit la lettre indéterminée u , & par les règles connues d'algèbre on aura une nouvelle équation, où u sera déterminée par les coefficients de la donnée, & puisque u doit pouvoir représenter toutes les combinaisons possibles des racines de la première équation prises deux à deux, on verra facilement par la théorie des combinaisons, que cette équation

$$\text{sera du degré } \frac{2^m . P . (2^m . P - 1)}{2} = 2^{m-1} P . (2^m P - 1)$$

si donc $m = 1$, cette équation sera d'un degré impair, & aura par conséquent une racine réelle. Que si m est plus grand que l'unité qu'on divise de nouveau cette équation par une autre du second degré dont le coefficient du second terme soit u' , & qu'on fasse pour abrégé $2^m . P - 1$ qui est un nombre impair $= P^1$; par les mêmes raisons, que ci-devant la lettre u' sera donnée par une équation dont l'exposant sera exprimé par

$$\frac{2^{m-1} P . P^1 . (2^{m-1} P . P^1 - 1)}{2} = 2^{m-2} P . P^1 . (2^{m-1} P . P^1 - 1)$$

Dans le cas de $m = 2$ cette équation sera de degré impair & aura comme on fait une racine réelle. Si enfin m étoit encore plus grand que 2 on n'auroit qu'à poursuivre le calcul, & il est évident que la m^{me} équation devra être d'un degré impair.

On aura donc les équations suivantes

$$z^2 + uz + M = 0$$

$$u^2 + u'u + M^1 = 0$$

$$u'^2 + u''u' + M^{11} = 0$$

$$u''^2 + u'''u'' + M^{111} = 0$$

$$\&c. \quad \&c. \quad \&c.$$

et

Et la dernière équation sera telle que son dernier terme, & le coefficient du second seront réels; puisque ce coefficient sera la racine réelle de l'équation m^{me} qui est comme on l'a vu de degré impair (*), & que le dernier terme est encor, comme on le fait, déterminable par ce coefficient, & par ceux de l'équation donnée sans extraction de racine: si donc on prend une des racines de cette équation elle aura la forme $m + n\sqrt{-1}$, & sera le coefficient du second terme de l'équation qui la précède, dont le dernier terme se tirera de même par de pures préparations algébriques, de ce coefficient & des données de la première formule, & les racines de cette nouvelle équation seront donc de nouveau de la forme $p + q\sqrt{-1}$. En poursuivant la même opération on arrivera finalement à la première $z^2 + uz + M$, par laquelle on a divisé la proposée, & par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait pour les autres, on verra que u & M auront la forme $r + s\sqrt{-1}$: par conséquent si on résout cette équation, ses racines auront encore la forme $A + B\sqrt{-1}$: d'où il suit, que $z - A - B\sqrt{-1}$ sera un diviseur exact de l'équation donnée. Or en substituant dans celle-ci $A + B\sqrt{-1}$ au lieu de z , on trouve pour déterminer B une équation dont tous les termes impairs manquent, ce qui fait connoître que cette équation sera également divisible par $z - A + B\sqrt{-1}$ elle le sera donc aussi par le produit de ces deux racines, qui est le trinôme réel $z^2 - 2Az + A^2$.

q

Quoi-

(*) Comme cette proposition, qu'une équation de degré impair a toujours une racine réelle, est déduite communément dans les livres d'algèbre de la supposition que les racines imaginaires se trouvent toujours deux à deux dans les équations: pour ne pas paroître tomber dans une cerce vicieux, je remarquerai ici qu'on peut aisément la démontrer indépendamment de cette supposition: car si on substitue pour l'inconnue dans une équation impaire, premièrement $+\infty$, & puis $-\infty$, il est évident que toute la formule deviendra dans le premier cas $= \infty$, & dans le second $= -\infty$ d'où il suit qu'il y a toujours une quantité finie & réelle, qui substituée pour l'inconnue dans l'équation, la rendra $= 0$: c'est à dire que cette équation aura au moins une racine réelle,

Quoique cette proposition très remarquable dans l'Analyse, ait été maniée par les plus grands Géomètres de notre tems, elle n'a pas, que je sache, été démontrée jusqu'à présent d'une manière rigoureuse, & satisfaisante. Au reste la démonstration que je viens d'en donner a cet avantage, qu'elle n'est fondée que sur la pure théorie des équations.

Il faut avouer cependant que dans les équations élevées ce procédé devenant impraticable, on ne peut par cette méthode trouver actuellement ces facteurs: il seroit à souhaiter que les différens procédés qu'à tenté, pour cela le *R.P.* Le Seur (dans un mémoire sur le calcul intégral imprimé à Rome l'année 1748. où l'on observe, d'ailleurs une excellente conduite de calcul) fussent moins compliqués, & doués d'un plus grand degré de généralité; car quoique la longueur du calcul l'ait déjà fait échouer dès le huitième degré dans l'application qu'il a voulu en faire, sans qu'il ait même put faire voir dans ce cas particulier la vérité de la proposition que je viens de démontrer généralement, il paroît cependant qu'en simplifiant cette méthode on pourroit s'en servir avec succès. C'est là une matière que je me réserve d'examiner une autre fois, avec la théorie & la résolution générale des équations qui lui est intimement liée. Mais retournons aux quantités imaginaires considérées comme des derniers résultats.

6. Si l'on réfléchit sur la nature des racines imaginaires, qui comme on fait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de construction Géométrique possible, puisqu'il n'est point de manière de les considérer, qui lève la contradiction qui se trouve entre les données immuables par elles mêmes.

Cependant pour conserver une certaine analogie avec les quantités négatives, un Auteur dont nous avons un cours d'algèbre d'ailleurs fort estimable a prétendu les dé-
voir

voir prendre sur une ligne perpendiculaire à celle où l'on les avoit supposé, si par exemple on devoit couper la ligne $AB = 2a$ de façon que le rectangle des parties $x \times (2a - x)$, fut égal à la quantité $2a^2$ on trouveroit $x = a \pm \sqrt{-a^2}$, pour trouver donc cette valeur de x , qu'on prenne sur la ligne AB , la partie $AC = a$ partie réelle de la valeur de x , & sur la perpendiculaire ED les CE, CD aussi $= a$, on aura les points D, E qui résolvent le problème en ce que $AD \times DB$, ou $AE \times EB = 2a^2$, mais puisque les points $E, & D$ sont pris hors de la ligne AB , & qu'une infinité d'autres points pris de même, auroient aussi une propriété semblable, il est visible, que si cette construction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait absolument rien connoître, c'est cependant là un des cas où elle pourroit paroître plus spécieuse, car le plus souvent on ne voit absolument pas comment le point trouvé pourroit résoudre la question, quelques changemens qu'on se permit dans l'énoncé du problème.

Les racines imaginaires n'admettent donc pas une construction géométrique, & on ne peut en tirer aucun avantage dans la résolution des problèmes: on devroit par conséquent s'attacher à les écarter autant qu'il est possible des équations finales, puisque prises dans quel sens que ce soit, elles ne peuvent pas résoudre la question, comme les racines négatives, dont toute la contradiction consiste dans leur manière d'être à l'égard des positives.

7. De cette considération il paroît qu'on peut conclure que les logarithmes des quantités négatives, qui ne sont que l'expression de leur rapport avec les positives, doivent être impossibles ou imaginaires. C'étoit le sentiment de M. Leibnits, qui l'a soutenu vivement contre M. Bernoulli. Il fonde son opinion sur la nature des logarithmes, en disant que si l'on suppose que 0 soit le logarithme de 1, & celui de 2 il est évident que x pouvant représenter un

nombre quelconque entier rompu positif ou négatif, 1^{er} devra être l'expression générale d'un nombre quelconque dont le logarithme sera x : or l'on voit qu'aucune valeur possible de x ne peut rendre le nombre 1^{er} négatif, & que par conséquent il n'y a point de logarithme d'un nombre négatif. Ce qu'on doit admettre d'autant plus volontiers, qu'autrement il s'en suivroit une absurdité ; c'est à dire qu'une quantité imaginaire auroit un logarithme réel ; car si $+2$ avoit un logarithme n , $\sqrt{-2}$ devroit aussi avoir $\frac{n}{2}$ pour logarithme.

Cependant Mr. Bernoulli disoit que puisque $\frac{1}{2} l. 4 = l. \sqrt{4}$, & que $\sqrt{4}$ est également $+2$ & -2 , on en doit conclure que le nombre négatif -2 a absolument le même logarithme que 2 . Quand aux raisons de Mr. Leibnitz il y répondoit, que quoique les nombres négatifs ne formassent pas une suite avec les nombres positifs, cela n'empêchoit pas qu'ils n'en formassent une à part, dont -1 seroit le premier terme. Qu'au reste $l. \sqrt{2} = \frac{1}{2} l. 2$ seulement parce que $\sqrt{2}$ est moyen proportionnel entre 1 & 2 ; mais qu'il n'est pas vrai que $l. \sqrt{-2} = \frac{1}{2} l. -2$, puisque $\sqrt{-2}$ n'est pas moyen entre -2 & -1 .

Outre les raisons que nous venons d'alléguer, Mr. Bernoulli déduisoit immédiatement son sentiment de la continuité de l'hyperbole ; mais comme Mr. Euler a établi sur des calculs neufs & très ingénieux, un troisième sentiment qui concilie toutes les difficultés que nous venons d'exposer, je ne parlerai de cette nouvelle preuve de Mr. Bernoulli, à laquelle le célèbre Géomètre que je viens de citer n'a pas touché, qu'après avoir fait connoître son procédé en peu de mots.

8. On fait que pour les logarithmes hyperboliques, si ω est infiniment petit, $L(1 + \omega) = \omega$, $L(1 + \omega)^2 = 2\omega$, & généralement $L(1 + \omega)^n = n\omega$, d'où l'on voit, que si l'on veut le logarithme fini y d'un nombre x , on

aura $y = n\omega$, & $x = (1 + \omega)^n$, ou bien $x^{\frac{1}{n}} = 1 + \omega$,

ce qui donne $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, le nombre n devant nécessairement être infini dans ce cas: si l'on met dans l'équation

$y = n\omega$, la valeur trouvée de ω , on aura $y = n x^{\frac{1}{n}} - n$

$= Lx$: or puisque $n = \infty$, $x^{\frac{1}{n}}$ aura une infinité de valeurs qui fourniront une infinité de logarithmes pour le nombre x .

Pour les trouver plus commodément, j'observe que, puisque $x = 1 \times x$, si je nomme X le logarithme tabulaire de x j'aurai $Lx = L.1 + X$. Je cherche donc tous les logarithmes de l'unité en substituant 1 pour x dans la for-

mule qui devient $n(1^{\frac{1}{n}} - 1) = y$, ou bien $(1 + \frac{y}{n})^n - 1 = 0$.

Or si π exprime l'Arc de 180. degré d'un cercle, dont le rayon = 1, & λ un nombre quelconque entier, on fait par le théorème de Mr. Cotes que cette équation résolue en ses facteurs, donnera généralement $1 + \frac{y}{n} =$

soit. $\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sin. \frac{2\lambda\pi}{n} \sqrt{-1}$; mais parceque $n = \infty$,

l'Arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ sera infiniment petit; ce qui changera la for-

mule en $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n} \sqrt{-1}$, & donne finalement

$y = \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}$.

Tous

Tous les logarithmes de $+1$ seront donc 0 , $2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, $6\pi\sqrt{-1}$ &c. On trouvera de même tous les logarithmes de -1 , en prenant de la même manière tous les facteurs de $(1 + \frac{\gamma}{n})^n + 1 = 0$ qui donnent gé-

néralement $1 + \frac{\gamma}{n} = \cos. \frac{2\lambda-1}{n} \pi \pm \sin. \frac{2\lambda-1}{n} \pi\sqrt{-1}$;

les logarithmes de -1 seront donc parceque $n = \infty$ $\pm \pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$ &c.

Pour trouver enfin tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque $a + b\sqrt{-1}$, notre illustre Auteur fait $\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$, & $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ seront le sinus & le cosinus

d'un angle ϕ facile à trouver par les tables; & la quantité imaginaire se changera en $c(\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})$ dans un cercle, dont le rayon $= 1$: & si C est le logarithme de c , on aura $l.(a + b\sqrt{-1}) = C + l.(\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})$, il suffira donc de trouver tous les logarithmes de $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$; pour cela j'observe que (*)

$$\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1} = (1 + \frac{\phi\sqrt{-1}}{n})^n$$

tout se réduit donc à trouver les facteurs de

$$(1 + \frac{\gamma}{n})^n - (1 + \frac{\phi\sqrt{-1}}{n})^n = 0 \text{ qui donnent}$$

$$1 + \frac{\gamma}{n} = (1 + \frac{\phi\sqrt{-1}}{n}) (\cos. \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sin. \frac{2\lambda\pi}{n} \sqrt{-1}),$$

d'où l'on tire par les raisons précédentes $\gamma = \phi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$; tous les logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ seront donc

$$c + \phi\sqrt{-1}, c + (\phi \pm 2\pi)\sqrt{-1}, c + (\phi \pm 4\pi)\sqrt{-1} \text{ &c.}$$

On

(*) Mr. Euler démontre ceci dans la dissertation citée en faisant voir que cette puissance développée, donne la même série infinie qu'on trouve en exprimant $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$ en ϕ par les suites connues; mais on peut tirer cette conclusion avec plus de facilité en généralisant la formule de l'art. 5. comme on peut le voir dans le premier tome de l'Ouvrage de cet Auteur intitulé *Introductio in Analysin infinitorum*; Cap. VIII.

On voit non seulement que tous les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires, comme Mr. Leibnitz l'avoit pensé, mais on a une méthode facile pour en trouver un aussi grand nombre qu'on voudra, & on s'apercevra aisément du parfait accord de cette théorie avec les opérations que demande l'idée des logarithmes, & je renvoie pour cela à l'excellent Mémoire que j'ai cité, où Mr. Euler fait voir comment

$$2l - a = 2l.a, 2l.\sqrt{-1} = l. - 1, 3l. - 1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} = l.1 \&c$$

ce qui résoud toutes les difficultés, & les raisons que Mr. Bernoulli opposoit à Mr. Leibnitz. Il semble donc que tous les doutes sont entièrement levés, & Mr. Euler se flatte que Mr. Bernoulli même ne se feroit pas refusé à ses raisons.

Cependant nous trouvons dans les lettres de ce grand Géomètre une preuve qu'il regardoit comme invincible, pour établir les logarithmes des nombres négatifs, à laquelle les calculs précédens ne paroissent poster aucune atteinte, & dont Mr. Euler n'a pas même fait mention; il la tiroit comme nous l'avons dit plus haut de la quadrature de l'hyperbole, de la manière suivante.

Soit (Pl. 1. Fig. 1.) l'hyperbole PQG avec l'opposée pgg entre les asymptotes perpendiculaires Rr , OX ; si on considère le point R comme fixe, & qu'après avoir tiré les ordonnées RP , SQ , EG ; rp , sq , eg , on prenne les SF , EH proportionnelles aux aires PS , PE , il est évident que la courbe $RFHO$ sera la logarithmique, dont OX sera l'asymptote.

Mais si l'on suppose que le point S après avoir passé en T arrive en e (car rien n'empêche qu'on ne puisse faire cette supposition) on voit que l'aire hyperbolique qui répondra à ce point sera en partie affirmative infinie TP , & en partie négative Tg , c'est à dire $TP - Tg$, & si

Tc

$Tc = TE$ l'aire qui répondra à cette abscisse sera $= PE$, donc on aura une nouvelle appliquée $ch = EH$, ce qui donne une branche pour la logarithmique au dessous de l'axe: indépendamment de la preuve qu'en vouloit tirer Mr. Bernoulli, de ce que $\frac{-dy}{y} = \frac{dy}{y}$: raison que Mr. Euler a fait voir n'être pas concluante, & ces deux branches seront liées à l'infini, tout comme le sont les branches de l'hyperbole (*).

La contradiction de ce résultat avec les calculs incontestables de Mr. Euler, sembloit faire douter de quelque équivoque dans le raisonnement; cependant Mr. de la Grange de l'Académie de Berlin qui avoit aussi été frappé de cette différence m'a bien voulu communiquer les réflexions qu'il avoit fait autrefois sur ce sujet; j'examinerai ici de nouveau, selon les vues qu'il s'étoit formé, l'origine des logarithmes hyperboliques.

10. Soit donc (Pl. 2. Fig. 3.) l'hyperbole LAP dont le centre est C , CX , CN les asymptotes, & CA le demidiámetro: soit l'ordonnée quelconque $PM = y$ & l'abscisse $CM = x$ le demidiámetro $CA = r$ on fait que $y = \sqrt{x^2 - r^2}$, & que par conséquent $y = \sqrt{-1} \times \sqrt{r^2 - x^2}$. Si à présent

(*) Mr. Bernoulli après avoir considéré l'espace OTR comme positif prend pour négatif l'espace XTr , quoiqu'ils paroissent devoir être du même signe, puisqu'ils sont opposés au sommet. Pour lever cette difficulté, on peut arriver à la même conclusion de la manière suivante. Qu'on réfléchisse que les aires hyperboliques, ne sont les logarithmes des abscisses que parceque si l'on prend celles-ci en progression géométrique, les aires formeront une progression arithmétique: ainsi l'aire $OTRP$, peut être le logarithme de TR , & $OTSQ$ le logarithme de TS &c., mais si l'on prend TR pour l'unité affirmative, & qu'on veuille que son logarithme soit 0, il faudra toujours soustraire des aires correspondantes aux abscisses dont on veut le logarithme, toute l'aire $OTRP$, & le logarithme de TS , par exemple, sera alors $-PQRS$: en effet TS étant plus petite que l'unité, son logarithme doit être négatif: en continuant le même raisonnement, on trouvera que le logarithme de T , ou de 0 sera $-OTPR$, & si le point S continue à reculer jusqu'en s le logarithme du nombre négatif Ts sera toujours $TXqs - OTRP$ ce qui se réduit encore à $-PQRS$, c'est à dire au logarithme du nombre positif TS .

présent on décrit du centre C avec le rayon CA un cercle dont les abscisses Cm soient pareillement appelées x , & les ordonnées Y , on aura $Y = \sqrt{r^2 - x^2}$ donc si l'on prend les mêmes abscisses pour le cercle, & pour l'hyperbole, on aura toujours $y = Y\sqrt{-1}$ ce que l'on sait d'ailleurs. Or il est clair que si deux courbes ont leurs ordonnées dans une raison constante, les aires seront dans la même raison, aussi bien que les secteurs qui seront formés par des lignes tirées de l'origine commune des abscisses à chaque point des courbes : puisque ces secteurs ne diffèrent de leurs aires que par des triangles de bases égales, & qui ont leurs hauteurs dans la même raison des ordonnées.

Puisque donc dans notre cas les ordonnées du cercle, & de l'hyperbole sont entre elles dans la raison constante de 1 à $\sqrt{-1}$, les secteurs circulaires, & hyperboliques qui répondent aux mêmes abscisses seront aussi dans la raison de 1 à $\sqrt{-1}$.

Cela posé soit dans le cercle l'angle $PCm = \phi$ on aura $Cm = x = r \cdot \cos. \phi$, $mp = Y = r \cdot \sin. \phi$, & le secteur $Ac p = \frac{r^2 \phi}{2}$, & par conséquent le secteur hyperbolique de l'abscisse $CM = x = r \cdot \cos. \phi$, & de l'ordonnée $Mp = y = r \cdot \sin. \phi \sqrt{-1}$ sera $\frac{r^2 \phi \sqrt{-1}}{2}$

Si l'on considère à présent l'hyperbole entre les asymptotes CN, CX , on sait que l'aire $ABQP$ est égale à $\frac{r^2}{2} \cdot l. \frac{CQ}{CB}$: or si des deux triangles CAB, CQP , qui sont égaux, puisqu'ils ont les bases en proportion réciproque des hauteurs, on leve la partie commune CHB , on aura $CHA = BHQP$, & si on ajoute AHP on aura le secteur hyperbolique $CAP = BAPQ$, donc $\frac{r^2 \phi \sqrt{-1}}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot l. \frac{CQ}{CB}$

2

ou

ou $\phi \sqrt{-1} = l. \frac{CQ}{CB}$ mais $\frac{CQ}{CB} = \frac{AB}{PQ}$, & à cause des triangles semblables ACB, PQN : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PN}$, & par conséquent $\phi \sqrt{-1} = l. \frac{AC}{PN}$: or $PN = MN - MP = x - y = r. (\cos. \phi - \sin. \phi \sqrt{-1})$; donc $\frac{AC}{PN} =$

$\frac{r}{r. (\cos. \phi - \sin. \phi \sqrt{-1})} = \frac{1}{\cos. \phi - \sin. \phi \sqrt{-1}}$, & $\phi \sqrt{-1} = l. \frac{AC}{PN} = l. \frac{1}{\cos. \phi - \sin. \phi \sqrt{-1}} = -l. (\cos. \phi - \sin. \phi \sqrt{-1})$ à cause de $l. 1 = 0$, & si l'on fait l'angle ϕ négatif, on aura $\phi \sqrt{-1} = l. (\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})$, qui est une formule assés connue aujourd'hui, mais qui n'a été jusques ici, que je sache, démontrée qu'à l'aide du calcul infinitesimal. Si $\sin. \phi$ est réel, ce qui arrivera toutes les fois que $\cos. \phi$ sera plus petit que l'unité, la quantité $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$ pourra représenter une imaginaire quelconque: d'où l'on voit comment les logarithmes imaginaires peuvent être ramenée à des Arcs de cercle; que si $\cos. \phi > 1$ alors $\sqrt{(1 - \cos. \phi^2)} = \sin. \phi$, sera une quantité imaginaire qui multipliée par $\sqrt{-1}$ devient réelle; donc dans ce cas $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$ sera une quantité réelle dont le logarithme pourra être exprimé par un Arc de cercle imaginaire; on pourra de même ramener les Arcs de cercle réels à des logarithmes de quantités imaginaires, & des Arcs de cercle imaginaires à des logarithmes de quantités réelles, ce qu'il suffira d'avoir indiqué ici, puisque cette theorie est déjà assés connue, & qu'il en est amplement traité dans la Dissertation de Mr. Euler que j'ai déjà citée.

Reprenons nôtre équation $\phi \sqrt{-1} = l. (\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})$, si l'on y suppose $\phi = 2 \lambda \pi$, π dénotant la demicirconférence du cercle dont le rayon $= 1$, & λ un nombre quel-

con-

conque entier positif ou négatif, puisque $\sin. 2 \lambda \pi = 0$, & $\cos. 2 \lambda \pi = 1$ on aura après avoir fait la substitution $2 \mu \pi \sqrt{-1} = l + 1$, qui est la formule que Mr. Euler a trouvé par un procédé tout à fait différent, & qui donne $l + 1 = +0, \pm 2 \pi \sqrt{-1}, \pm 4 \pi \sqrt{-1}$ &c. de même si l'on fait $\phi = \pi, = 3 \pi, = 5 \pi$, & généralement $\phi = (2 \lambda - 1) \pi$ ce qui donne $\sin. \phi = 0$, $\cos. \phi = -1$, on aura $(2 \lambda - 1) \pi \sqrt{-1} = l - 1$; on trouveroit avec la même facilité tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b \sqrt{-1}$ car si on décrit un cercle dont le rayon soit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ il est constant, qu'il y aura toujours un angle ϕ qui donnera $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1} = a + b \sqrt{-1}$. Or si dans la formule $\phi \sqrt{-1} = l$, ($\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$) on ajoute à $\phi, 2 \lambda \pi$, la quantité $\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1}$. ne changera point de valeur, comme il est évident, & conséquemment cette supposition n'altérera point la valeur de $a + b \sqrt{-1}$; & l'on aura généralement $(\phi + 2 \lambda \pi) \sqrt{-1} = l + (a + b \sqrt{-1})$.

Voilà donc la Théorie de Mr. Euler apuïée sur la quadrature de l'hyperbole, dont Mr. Bernoulli se servoit pour prouver un sentiment absolument opposé, sans que sa démonstration ait pour cela rien perdu de sa force; il est donc nécessaire de comparer ensemble les deux conclusions, & les procédés qui nous y ont conduit: ce qu'il sera à présent plus facile, puisqu'ils sont réduits à dépendre d'un seul, & même principe.

Si l'on fait attention au raisonnement de Mr. Bernoulli on s'apercevra aisément qu'il est tout fondé sur la continuité de la branche AL de l'hyperbole avec la al , ces deux branches étant liées à l'infini comme il est évident; car si

l'on fait $CQ = z$, $CA = r$, $QP = u$, on a $CB = \frac{r}{\sqrt{2}}$,

$uz = \frac{r^2}{2}$ ce qui donne $u = \frac{r^2}{2z}$, d'où l'on voit que si

on fait $z = \infty$, on trouve $u = 0$, & que si z décroît jusqu'à être

$= 0$ on aura $u = \infty = CK$, & z devenant à l'instant infiniment petit négatif ou -0 on trouvera $u = -\infty = CG$.

Concevons à présent un rayon (fig. 3.) CP , qui suive le point P pendant que celui-ci par un mouvement continu décrit l'hyperbole, & que les aires correspondantes donnent naissance à la logarithmique; il est visible que ce rayon partant de la position CQ , l'angle ACP qu'il forme avec l'axe décroîtra continuellement jusqu'à ce que CP devenant CA l'angle se trouve nul, d'où il commencera à prendre des accroissements négatifs, mais quand le rayon CP sera arrivé à la position CK , le point P qui est alors L passant immédiatement en I , comme on l'a vû, le rayon pour le suivre devra devenir tout d'un coup négatif CG , & l'angle ACP sera en même tems acruz de deux angles droits, & il est à remarquer que c'est alors précisément que commence la génération de la seconde branche de la logarithmique.

Cela posé reprenons nôtre équation $\phi\sqrt{-1} = L (\cos. \phi \pm \sin. \phi\sqrt{-1})$, on a vu que si $\phi = 0$ on avoit $0 = L + 1$

de même si $\phi = \frac{\pi}{4}$ on a $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = L (\cos. \frac{\pi}{4} \pm \sin. \frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$,

mais il est évident, que pour suivre le mouvement du point P , & conserver la continuité de l'hyperbole, il se doit faire un saut dans la continuité des angles, le rayon qui étoit CQ devenant alors tout d'un coup CR , & l'angle de ACQ passant à être son égal, ce qui change la

formule en $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = L (-\cos. \frac{\pi}{4} \mp \sin. \frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$;

cependant l'angle qui à présent est π décroîtra toujours à cause du mouvement du point P , & donnera généralement $\phi\sqrt{-1} = L (-\cos. \phi \mp \sin. \phi\sqrt{-1})$ jusqu'à ce que le rayon vecteur devenant ya on aye à cause de $\phi = 0$, $0 = L - 1$

Il est cependant évident que ce saut de deux angles droits blesse la continuité des arcs de cercle; d'où on peut infé-

inférer que cette formule ne contient pas le passage algébrique des logarithmes des quantités positives à ceux des négatives ; mais il paroît d'autre part qu'une expression différentielle de l'arc ϕ par ses sinus & cosinus devoit donner indistinctement la relation de cet arc ϕ à $\cos. \phi$ & $\sin. \phi$ & de $\phi + \pi$ à $\cos. (\phi + \pi)$ & $\sin. (\phi + \pi)$.

12. Delà il semble qu'on pourroit croire qu'une expression différentielle qui conduit à des logarithmes, appartiendroit également à des logarithmes de quantités positives, & à des logarithmes de quantités négatives, j'observe en effet que ces sortes d'expressions différentielles (pour ne pas parler ici des autres qui sont étrangères à mon sujet) sont beaucoup plus étendues, que leurs expressions algébriques, ou, pour mieux dire, qu'une même expression différentielle conduit également à différentes équations algébriques : si l'on cherche par exemple la soutangente de l'ellipse exprimée par

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \text{ on la trouve } \frac{y dx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x} \text{ ou la fraction}$$

$\frac{b}{a}$ ne se trouve plus, & qui par conséquent appartient

à toutes les ellipses faites sur le même diamètre a il est aussi visible que quoique la courbe ne se trouve plus quand $x > a$ la soutangente cependant continue à être réelle, & appartient alors aux hyperboles qu'on peut décrire sur l'axe donné ; toutes ces courbes sont donc liées d'une manière transcendantale par le moyen de la formule

$$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{a^2 - x^2}, \text{ \& quoiqu'on}$$

ne puisse pas passer de l'une à l'autre sans violer la continuité algébrique, on peut faire ce passage sans violer en aucune façon la continuité transcendante. Or l'intégration de cette équation conduit à des logarithmes, car elle donne

$$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{x^2 - a^2}$$

& intégrant $ly = \frac{1}{2} l. (x - a^2) + \frac{1}{2} l. m$ qui fait $y = \sqrt{m(x^2 - a^2)}$ ou la lettre m doit pouvoir recevoir une valeur quelconque

que positive négative ou même imaginaire pour conserver la même généralité à cette formule qu'on rencontre dans la différentielle $\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{a^2 - x^2}$, puisqu'elle appartient également à $y^2 = M(x^2 - a^2)$, & à $y^2 = N(a^2 - x^2)$.

14. Pour confirmer cette théorie je crois qu'il ne sera pas hors de propos de chercher directement l'intégrale de la formule $dx = \frac{ady}{y}$ par la méthode ordinaire du calcul intégral, qui a toujours été accusé d'être insuffisant, & même fautive dans cette occasion; je donnerai d'autant plus volontiers ici ce calcul qu'il est entièrement neuf, & qu'il peut être d'usage dans beaucoup d'autres occasions.

L'intégration de l'équation proposée fournit $x = \frac{ay^0}{0} + A$, pour déterminer A supposons que y doive être $= m$ lorsque $x = 0$, on aura $\frac{am^0}{0} + A = 0$, ou $A = -\frac{am^0}{0}$, & par conséquent $x = \frac{a(y^0 - m^0)}{0}$, qu'on divise par a , & qu'on multiplie par 0 , & on aura $\frac{0x}{a} = y^0 - m^0$ & $y^0 = m^0 + \frac{0x}{a}$, & extrayant de part & d'autre la racine 0 , $y = (m^0 + \frac{0x}{a})^{\frac{1}{0}}$, & tirant de même la racine x $y^{\frac{1}{x}} = (m^0 + \frac{0x}{a})^{\frac{1}{0x}}$. Si à présent on développe cette puissance, on trouvera $y^{\frac{1}{x}} = m^{0:0x} + \frac{1:0x}{1} m^{0:(1:0x-1)} \cdot \frac{0x}{a} + \frac{(1:0x)(1:0x-1)}{1.2} m^{0:(2:0x-2)} \cdot \frac{0^2 x^2}{2}$.

$$\frac{0^1 x^2}{a^2} + \frac{(1:0x)(1:0x-1)(1:0x-2)}{1.2.3} m^{0:(1:0x-3)} \quad 135$$

$\frac{0^1 x^2}{a^2} + \&c.$, & réduisant au même dénominateur les fractions dans les exposans, & les coefficients

$$y^{1:x} = m^{0:0x} + \frac{1}{0x} m^{0:(1-0x):0x} \cdot \frac{0x}{a} +$$

$$\frac{1 \times (1-0x)}{2 \cdot 0^1 x^2} m^{0:(1-02x):0x} \cdot \frac{0^2 x^2}{a^2} + \frac{1 \times (1-0x)(1-02x)}{2.3 \cdot 0^2 x^3} m^{0:(1-03x):0x} \cdot \frac{0^3 x^3}{a^3} + \&c., \& \text{réduisant \& laissant les ter-}$$

mes qui sont nuls $y^{1:x} = m^{1:x} + \frac{m^{1:x}}{a} + \frac{m^{1:x}}{2a^2} +$
 $\frac{m^{1:x}}{2.3a^3} + \&c.$, on aura donc

$$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c. \right)$$

si on fait cette suite

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c. = e, \text{ on aura}$$

$$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} e, \text{ ce qui donne } y = m e^x \text{ qui est l'équation finale}$$

cherchée qui devient $l.y = x l.e + l.m.$

L'arbitraire m depend donc absolument des applications particulieres qu'on veut faire de cette formule, ainsi dans l'équation $\frac{y dx}{dy} = \frac{x^2 - a^2}{x}$ qui intégrée par le moien des logarithmes nous à donné généralement $y^2 = m(a^2 - x^2)$ il faut faire l'indéterminée $m = \frac{a^2}{b^2}$ si l'on veut qu'elle apar-

tienne à l'ellipse exprimée par l'équation $y = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2}$,

&

& $m = -\frac{a^2}{b^2}$ si l'on veut l'appliquer à l'hyperbole de l'équation $y = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 - a^2}$.

On conclut de tout ceci que la courbe exprimée par l'équation $dy = \frac{dy}{y}$ ou $x = l.m y$ doit nécessairement être composée d'une infinité de branches au dessus, & au dessous de l'axe; ainsi (fig. 6.), un logarithme AE n'appartient généralement pas plus au nombre EF qu'aux nombres EG, EH &c., & même à un imaginaire quelconque. J'observe cependant qu'une seule branche BF peut satisfaire à tous les cas des nombres positifs, & la bf à tous les négatifs en changeant seulement l'origine A , ce qui étoit déjà évident par la Théorie des logarithmes. Mais l'origine étant une fois fixée en A , si l'on veut par exemple que $l. 1 = 0$, étant $AB = 1$, c'est dans la seule branche BF qu'on doit chercher les logarithmes des autres nombres positifs; car si on vouloit encor se servir de la NG , il est évident qu'en prenant $MN = 1$ on auroit $-AM = l. MN = l. + 1$ ce qui est contre la supposition qu'on avoit fait de $l. 1 = 0$.

Toutes les branches BF, CG &c. ne sont donc pas liées algébriquement, & ne sont qu'autant de cas particuliers de l'équation différentielle $x = \frac{dy}{y}$, qui sont déterminés par l'intégration. L'expression $y = e^x$ exclut aussi la branche bf , puisque quelque valeur qu'on donne à x , y ne peut être négatif à moins qu'on ne fit x imaginaire.

Au reste pour faire mieux sentir qu'on ne rencontre x imaginaire, que parcequ'on cherche y négative dans une branche ou elle ne peut pas l'être, il est bon de remarquer, que cela arrive même dans les courbes algébriques.

Soit

Soit par exemple la courbe représentée par l'équation

$y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, qui a évidemment deux branches une au dessus, & l'autre au dessous de l'axe, à cause de l'ambiguïté du signe radical, si dans la branche qui appartient à $+\sqrt{(a^2 - x^2)}$ je voulois trouver un y négatif, on voit qu'il faudroit que je fisse x imaginaire, ce qui me donneroit $y = \frac{-x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$.

Il est donc visible, que l'expression transcendante nous laisse à la vérité le choix d'une branche quelconque de la logarithmique, mais que la nature du problème nous ayant déterminé à une d'elles, il n'est plus permis de passer à une autre, puisqu'elles ne sont pas liées algébriquement.

15. Tout ce que nous venons de dire ne paroît cependant encor porter aucune atteinte à la démonstration de Mr. Bernoulli; mais par un examen réfléchi on pourra en découvrir le défaut, & quels sont les cas où on pourroit l'adopter. Repré-
nons pour cela l'équation à l'hyperbole entre ses asymptotes $z = \frac{1}{u}$ qui donne $dz = -\frac{z du}{u}$, d'où l'on tire pour

l'élément de l'aire $\frac{dz}{z}$, qui est aussi comme on fait la différence de $L.z$: qu'on suppose à présent avec Mr. Bernoulli, que l'abscisse z décroisse, jusqu'à être finalement nulle, il est hors de doute, que l'ordonnée u , après être devenue infinie passera à être infinie négative, & appartiendra à l'autre branche de l'hyperbole puisqu'il y a un passage algébrique de l'infini positif à l'infini négatif, mais il n'en fera pas de même de l'aire, puisque lorsque, l'abscisse z devient infiniment petite, & l'ordonnée infiniment grande, l'élément de la Courbe se trouvant alors

f

$m dz$

$\frac{mdz}{dz}$, qui est une quantité finie, & cette aire lorsque z dévient infiniment petite négative se trouvant de même finie, mais négative, l'aire de l'hyperbole ne peut faire ce passage sans recevoir tout à coup un décroissement fini; or une quantité quelconque ne peut devenir négative de positive qu'elle étoit, sans passer par 0 ou par l'infini; il est donc évident qu'il n'y a pas un passage algébrique de la branche positive de la logarithmique à la branche négative, puisque la continuité des aires hyperboliques est interrompue par la quantité finie $\frac{mdz}{dz} = m$.

Les deux branches de la logarithmique trouvées par Mr. Bernoulli sont donc isolées, & indépendantes l'une de l'autre algébriquement, quoiqu'elles soient liées par leur expression transcendante; mais elles ne sont pas moins réelles l'une que l'autre, & elles auront leurs usages particuliers dans plusieurs cas.

Cette théorie pouvant peut-être paroître une pure spéculation absolument inutile dans la pratique; je crois qu'il ne sera pas hors de propos d'en faire ici l'application pour servir de dénouement à quelques paradoxes tirés de la Mécanique (*).

16. Soit par exemple (Fig. 8.) un centre d'attraction C dont la force soit proportionnelle, à la n^{me} puissance des distances, on aura pour l'expression de la vitesse u d'un corps A lors qu'il aura parcouru l'espace $AB = x$; l'équation $\frac{dx}{(a-x)^n} = u du$, & en intégrant $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}{n+1}$ parce que $u = 0$ quand $x = 0$; l'on voit

(*) Pour connoître l'importance des remarques suivantes, je prie le Lecteur de relire la Proposition 32. du premier Tôme de la Mécanique de Mr. Euler, & les autres Propositions de cet excellent Ouvrage qui peuvent y avoir rapport.

voit facilement, que quand le corps sera arrivé en C on aura $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ si $n+1$ est positif, & $u^2 = \infty$ si $n+1$ est négatif, mais si $n+1 = 0$ on aura alors recours à la méthode, que nous avons enseigné (art. 14.) & on trouvera pour l'expression générale de la vitesse, $\frac{u^2}{2} = L \frac{a}{a-x}$

sans retourner pour cela à l'équation différentielle, comme tous les Auteurs qui ont écrit de cette matière ont été obligés de faire jusques à présent, & il en sera de même, pour le dire en passant, d'une infinité de cas semblables qui se rencontrent très fréquemment dans la mécanique, de façon qu'on étoit toujours contraint de recommencer un calcul souvent assés long: on aura dans ce cas pour la vitesse au point C , $u^2 = L \infty$

(*) Il est de plus évident par la nature du problème, que le corps devra dans tous les cas passer au delà du point C de façon, que si $Ca = CA$, & $Cb = CB$ la vitesse en b sera la même, qu'au point B , & sera finalement nulle au point a comme elle l'étoit en A : or on voit qu'afin que la même formule, qui nous donnoit la vitesse du corps A pour la partie AC puisse s'appliquer également à la partie aC il est nécessaire qu'en faisant $a-x$ négatif on trouve l'acroissement de la vitesse négatif, & cette même vitesse toujours positive, & il est facile de s'apercevoir, que cela doit toujours arriver quand n sera un nombre impair, & entier, positif ou négatif. Mais par quelle fatalité devoit-on en excepter le cas où $n = -1$ comme on l'a pré-

f 2

tendu

(*) Mr. Euler a prétendu à la vérité démontrer l'impossibilité de ce passage par la considération d'une éclipse (art. 665.) de la mécanique, mais le P. Boscovich a résolu cette difficulté (art. 82. *Dissertationis de attractione corporum quæ sunt immobilia* tom. 2. part. 3. *Academia Bononiensis*.)

tendu jusques à présent, parcequ' on supposoit dans ce cas, que l'expression de la vitesse au delà du point C étoit imaginaire, étant exprimée par le logarithme d'une quantité négative.

Pour examiner ceci, qu'on se rappelle, ce que nous avons vu (art. 15.) que le passage des logarithmes des quantités positives à ceux des négatives n'étoit interrompu, que parceque l'aire qui leur donnoit naissance recevoit tout d'un coup un accroissement fini. Toutes les fois donc qu'on pourra faire cette supposition sans hurter la nature du problème, il est évident, que ce passage ne sera point interrompu, & que les logarithmes des quantités positives, & négatives quoique tirés de la même formule seront également réels. Or s'il existoit dans la nature une loi telle que nous venons de la supposer, je ne vois pas pourquoi on ne voudroit pas admettre cette espèce de saut dans l'accroissement de la vitesse du corps au point C puisqu'il est sur que la vitesse, qui un instant avant le passage étoit finie redéviend finie un instant après. Le cas de $n = -1$ rentreroit alors dans la règle générale, & l. $(a-x)$ demeureroit réel quoique $x > a$ ce qui en effet est conforme aux loix de la nature quoiqu'il en soit on peut faire cette supposition sans crainte d'erreur.

Pour ce qui est des cas, où n est un nombre pair, on a vu plus haut que quoique le Corps passe également le point C , de façon, que sa vitesse est de nouveau zero au point a , cependant en faisant $x > a$ la formule ne donne plus la vraie vitesse du corps A , & cela dépend uniquement du défaut de l'expression algébrique, qu'on ne peut alors assigner générale pour les deux cas.

Pour lui donner cependant la plus grande généralité, dont elle est susceptible qu'on pose $b(a-x)^n dx = u du$ où la lettre b soit une indéterminée dont la valeur dépend des applications particulières qu'on veut faire de cette formule

141

mule ; on a en intégrant $b \left(\frac{a^{n+1} - [a-x]^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{u^2}{2}$ l'on voit que l'indéterminée b doit être positive toutes les fois que m est un nombre impair, & quand m est un nombre pair on fera de même b positive de A jusqu'en C , & négative de C jusqu'en a ; or puisque dans le point C considéré comme e dernier point de la ligne positive AC on a $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ en le considérant comme le premier point négatif, on doit trouver pareillement $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ ce qui donne quand $x = 2a$, $u^2 = 0$, comme il doit être en effet.

Mais lorsque n est un nombre rompu dont le dénominateur est pair, passé le point C , il faut faire $b = -m\sqrt{-1}$ & alors la même formule pourra servir pour tous les cas.

Voilà quels changemens on est obligé de faire à la formule pour que dans certaines circonstances elle ne nous rende pas imaginaires des expressions qui doivent y être réelles.

17. Il se présente une autre difficulté dans les cas où m est impair, & négatif, il est évident que le tems doit toujours croître à mesure que le corps s'éloigne du point

A cependant supposons que $m = -3$ on aura $\left(\frac{dx}{n-x} \right)^2 =$

$u du$ & intégrant $u^2 = \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2(a-x)^2}$, & u

$= \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{u(a-x)}$, & par conséquent $dt = \frac{dx}{u} =$

$\frac{a dx (a-x)}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, & $t = a \sqrt{(2ax - x^2)}$ on voit que cette ex-

pression du tems est dans ce cas exprimée par des lignes proportionnelles aux ordonnées d'un cercle décrit, sur le diamètre Aa (Fig. 9.), mais elle ne peut servir que jusques en C , puisque depuis ce point les ordonnées décroissent, ce qu'il est

est absurde d'attribuer au tems. Mais si l'on fait reflexion que le radical $a\sqrt{(2ax - x^2)}$ a deux valeurs, on verra bien tôt que le signe $+$ de ce radical doit servir de A en C . & le signe $-$ de C en a : on aura donc généralement dans ce dernier cas $t = -a\sqrt{(2ax - x^2 + A)}$; pour déterminer la constante A qu'on réfléchisse que dans le point C les deux valeurs de t doivent être les mêmes, d'où l'on tirera $a^2 = -a^2 + A$ & $A = 2a^2$, & le tems t sera généralement exprimé par $2a^2 - a\sqrt{(ax - x^2)}$; ce n'est donc que le quart de cercle AB qui servira à la construction du tems, jusqu'au point C , & au de là de C on devra construire un cercle du diamètre $= a$ qui touche l'autre en B , & continuer à prendre les tems sur ce nouveau quart de cercle. Quoique ces deux cercles ne puissent pas être contenus dans une même equation algébrique, il est cependant visible que le quart de cercle AB est également contigu avec BD qu'il le seroit avec le reste du demi cercle.

Cette construction est facile, & exacte, & elle me paroit lever les difficultés qui dans ce cas, & dans un grand nombre d'autres semblables ont arrêté les géomètres.

Voilà je crois assés d'exemples de formules algébriques, qui pour être appliquées à des cas qu'elles ne peuvent exprimer, rendent imaginaires & absurdes des expressions, qui doivent être réelles par la nature du problème. (*)

C'est

(*) Dans l'article *Gravitation* de l'Encyclopédie, & dans le troisième tome des Recherches sur le système du Monde (pag. 198.) : il est parlé d'un certain paradoxe qu'on rencontre dans des formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque. Comme l'explication que j'en ait trouvé, & que j'ai même communiqué à l'Auteur, dans une lettre particulière, me paroît fondée, & que d'ailleurs elle tient immédiatement aux principes établis ci-dessus, je crois qu'on voudra me permettre d'ajouter ici deux mots sur ce point. Voici en quoi consiste le paradoxe. Soit cherchée l'attraction d'une surface sphérique sur un point placé sur la surface même dans le cas des forces en raison inverse des carrés des distances. Si l'on commence par considérer le point au delà de la surface, & qu'ayant trouvé l'expression générale de son attraction, on

C'est sans doute un inconvénient dans l'algèbre qu'on ne puissent pas toujours trouver des formules générales, qui puisse s'appliquer à toutes les circonstances de la question, mais il sera toujours assés facile de reconnoître les cas qui ne peuvent être exprimés par ces équations, & on pourra les corriger par un procédé semblable à celui, dont je me suis servi.

18. Ces cas sont au reste plus fréquents dans l'algèbre qu'on ne se l'imagine communément, & quoique le cas irréductible du troisième degré ne rende pas l'inconnue absolument imaginaire, la mauvaise méthode qui y conduit ne laisse pas de lui en donner la forme, comme tout le monde le fait.

On

faite ensuite évanouir la distance de ce point à la surface on aura 4π pour l'attraction. Au contraire si le point est d'abord supposé au dedans de la surface, son attraction se trouve toujours égale à zéro, d'où elle reste encore nulle quand le point vient toucher la surface même. Que si l'on veut d'abord regarder le point comme placé sur la surface, on obtient pour lors la formule de son attraction $\equiv 2\pi$. On a donc trois valeurs différentes 4π , 2π , 0 , qui semblent appartenir au même cas; ce qui doit paroître au premier aspect absurde, & contradictoire. Pour trouver le dénouement de cette difficulté, il faut rechercher avec soin ce que ces trois manières de considérer le même cas peuvent avoir de différent entr'elles. Or je dis que cette différence dépend du point de la surface A qui exerce une force finie, & $\equiv 2\pi$ le point B , lorsque on fait évanouir leur distance AB . Pour s'en convaincre on n'a qu'à réfléchir qu'un point de surface est nécessairement un infiniment petit de second ordre; & que la fonction AB^2 de la distance évanouissante devient aussi infiniment petite du même ordre, d'où il s'ensuit que l'attraction du point A qui est proportionnelle à ce point, divisée par la fonction donnée deviendra finie; & on peut s'assurer d'ailleurs que cette attraction sera précisément $\equiv 2\pi$. Ceci posé quand on fait venir le point B à la surface de dehors, on a l'attraction $\equiv 4\pi$ qui est composée de l'attraction 2π du point A , & de l'autre partie 2π qui doit nécessairement exprimer l'attraction du reste de la surface. Mais si l'on fait que le point vienne toucher la surface au dedans alors l'attraction 2π du point A devra agir en sens contraire, & jointe avec l'autre partie 2π qui agit dans le même sens, qu'auparavant donnera $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'attraction dans ce cas; enfin, si le point est d'abord placé sur la surface en A , on exclut dans ce cas l'attraction du point de surface A , & on n'a seulement 2π pour l'attraction totale, tout de même comme nous le donne le calcul. Pour sentir mieux la raison de ces différences, il faut faire le calcul en entier; on verra aisément que la différentielle est composée de deux parties, dont l'une est toute multipliée par la distance du point à la surface, & devient par conséquent égale

On rencontre un semblable inconvénient, lorsqu'on tente de construire une équation au moyen d'une courbe qui n'en est pas capable, car quoique ses racines soient réelles, on trouve pour les déterminer des intersections imaginaires, cela arrive souvent quand on se sert de deux courbes qui peuvent avoir des abscisses auxquelles répondent des appliquées imaginaires, car il est évident que ces courbes peuvent avoir, à une abscisse commune, des ordonnées égales quoique imaginaires: ce qui ne peut pas servir à déterminer cette abscisse. Si cependant on substituoit à la place de ces courbes, des autres que j'appellerai leurs contraires, qui eussent les ordonnées réelles précisément où les premières les ont imaginaires, les intersections de ces deux courbes résoudroient sûrement le problème; mais cet ouvrage étant actuellement sous presse, je ne m'arrêterai pas à examiner cette matière, qui me paroît cependant digne de quelque attention..

Avant

à zero, lorsque cette distance évanouit, l'autre partie donnant 2π pour intégrale; c'est le cas, où le point est d'abord placé sur la surface; mais si l'on achève l'intégration avant que de faire évanouir cette distance on trouve l'intégrale de la première partie une expression finie, qui se réduit au contact $= 2\pi$ si le corps a été supposé de dehors, & $a - 2\pi$ si on l'a supposé de dedans, d'où l'on tire pour le premier cas $2\pi + 2\pi = 4\pi$, & $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'autre. Voila donc pourquoi la même formule ne peut pas servir pour tous les cas possibles, car dans le passage du point de dehors en dedans, il faudroit que l'attraction 2π devint tout d'un coup $= 0$; & puis $= -2\pi$ ce qui choque directement la loi de continuité généralement admise dans les formules algébriques. M. Daniel Bernoulli avoit déjà senti l'incompatibilité de ces cas dans une même formule, comme il paroît dans l'art. 4. du chap. 11. de la Pièce sur le flux, & reflux de la mer. Au reste il ne doit pas paroître étonnant qu'un point qui par rapport à une surface doit être regardé comme zero puisse dans certains cas exercer une force finie; car il est clair qu'il suffit pour cela que la fonction qui exprime la force devienne infinie, & infinie du même ordre que le point est infiniment petit. Nous avons vu comment une formule qui est toujours égale à zero peut recevoir une valeur finie dans certains cas particuliers (chap. VI de ma dissertation sur le son) c'est la même chose qui arrive ici. Au reste les Géomètres ne sont plus étrangers à ces sortes de paradoxes, si on les peut nommer ainsi, (Car je n'y vois que des conséquences toutes naturelles des suppositions qu'on a fait dans le calcul.) Mr. Clairaut a fait voir un semblable cas dans sa Théorie sur la figure de la Terre, art. 45. de la première partie, & le

19 Avant cependant que de finir ces réflexions je crois qu'il ne sera pas hors de propos de donner au moyen de la formule de l'art. 10. une démonstration nouvelle & purement géométrique du fameux Théorème des imaginaires, publié premièrement par Mr. D'Alembert dans son Traité de la cause des vents, & puis manié de nouveau par Mr. Euler dans la Dissertation sur les imaginaires déjà citée; d'autant plus que ces deux célèbres Géomètres ne l'ont démontré que par les Principes du calcul différentiel. Voici l'énoncé de cette proposition, dont véritablement l'usage me paroît fort rare dans l'Analyse. Une quantité imaginaire quelconque, de la forme $c + d\sqrt{-1}$ élevée à une puissance dont l'exposant soit aussi imaginaire de la même forme, peut toujours se réduire à une imaginaire simple $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles: qu'on pose donc $(a + b\sqrt{-1})^{c + d\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$ il s'agit de trouver les valeurs de A & de B .

Soit pour cela $\sqrt{a^2 + b^2} = r$, & $\frac{a}{r} = \cos. \phi$; $\frac{b}{r} = \sin. \phi$, de plus $\sqrt{A^2 + B^2} = R$, & $\frac{A}{R} = \cos. \theta$, $\frac{B}{R} = \sin. \theta$.

Pere Boschovik dans un mémoire sur l'attraction des corps vers un centre fixe imprimé dans la troisième partie du second tome des Commentaires de l'Académie de Bologne; & on voit dans la dissertation présente que le dénouement des difficultés sur le passage des logarithmes des nombres positifs à ceux des nombres négatifs dépend d'un pareil Principe.

Mr. D'Alembert apporte encore pour objection à la loi de continuité l'exemple de la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt{a^3(x+b)}$, que Mr. Euler avoit déjà proposé dans son Mémoire sur les logarithmes. Cette équation dégagée des radicaux monte au huitième degré; & a généralement un diamètre, cependant dans le cas, où $b=0$ elle ne monte plus qu'au quatrième, & perd tout d'un coup son diamètre; mais il faut remarquer que cela n'arrive que parce que la courbe dans ce cas devient un système de deux, qui sont exprimées par $y^4 - 2axy^2 + 4ax^2y + a^3x^2 - a^3x = 0$ & $y^4 - 2axy^2 - 4ax^2y + a^3x^2 - a^3x = 0$ dont chacune en particulier est à la vérité dépourvue de diamètre; mais leur système le conserve toujours. Tous les ordres des courbes algébriques contiennent des exemples de cas semblables. NOTE DE Mr. LOUIS DE LA GRANGE.

fin. θ , on aura $[r (\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})]^{m+n\sqrt{-1}} = R (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1})$, & en prenant les logarithmes $(m+n\sqrt{-1}) [l. r + l. (\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})] = l. R + l. (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1})$, & par la formule citée $(m+n\sqrt{-1}) (l. r + \phi \sqrt{-1}) = l. R + \theta \sqrt{-1}$, & faisant la multiplication actuelle $m l. r - n \phi + (n l. r + m \phi) \sqrt{-1} = l. R + \theta \sqrt{-1}$, & comparant les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on a :

$$R = e^{m l. r - n \phi}, \text{ ou bien } R = e^{m l. \sqrt{(a^2 + b^2)} - n \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}}$$

$$\& \theta = n l. \sqrt{(a^2 + b^2)} + m \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \text{ de là}$$

$$A = R \cos. \theta = e^{m l. \sqrt{(a^2 + b^2)} - n \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}}$$

$$\cos. [n l. \sqrt{(a^2 + b^2)} + m \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}] \& B = R$$

$$\sin. \theta = e^{m l. \sqrt{(a^2 + b^2)} - n \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}} \sin. [n l. \sqrt{(a^2 + b^2)} + m \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}]$$

$$[n l. \sqrt{(a^2 + b^2)} + m \text{Arc. sin. } \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}]$$



CON-

CONSPECTUS TOTIUS OPERIS.



DE IIS, QUÆ IN SOCIETATE ACTA SUNT COMMENTARIJ.

A JOHANNE FRANCISCO CIGNA CONSCRIPTI.

DE belliniano Problemate , seu de Ovorum elixatorum cicatricula.

De varia barometrorum diversæ diametri altitudine.

De corrigendis barometrorum erroribus ex calore, & frigore natis.

De fallacia methodi dimetiendi quantitatem attractionis.

De ascensu , & descensu thermometrorum variis liquoribus madentium ex inflato vento.

De causa extinctionis flammæ in clauso aere.

DISSERTATIONES, ET OPUSCULA VARIA.

Memoire du CHEVALIER SALUCE sur la nature du fluide élastique/qui se développe de la Poudre à Canon.

Recherches sur la methode de maximis , & minimis par M. LOUIS DE LA GRANGE.

Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies , qui contient la Théorie des suites récurrentes par M. LOUIS DE LA GRANGE.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA , *De analogia magnetismi , & electricitatis Dissertatio.*

Ejusdem. De colore sanguinis experimenta nonnulla.

JOHANNIS BAPTISTAE GABER *Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.*

Fasciculus stirpium Sardinæ in Diœcesi Calaris lectarum a MICHAELE ANTONIO PLAZZA Chirurgo Taurinensi , quas in usum Botanicorum recenset CAROLUS ALLIONIUS.

De

De glanduloso Ovarii corpore, de utero gravido, & placenta
Observationes AMBROSII BERTRANDI.

Suite des recherches sur le fluide élastique de la poudre à
Canon par le CHEVALIER SALUCE.

Recherches sur la nature, & la propagation du son par
M. LOUIS DE LA GRANGE.

Introduction

Section. 1. Recherches sur la nature du son.

Cap. I. Des oscillations des parties intimes des fluides élastiques.

Cap. II. Des vibrations des cordes.

Cap. III. Solution de Problème général proposé dans les chapitres précédens.

Cap. IV. Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est fini.

Cap. V. Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est infini.

Cap. VI. Réflexions sur les calculs précédens.

Cap. VII. Théorie des cordes de musique, & des flûtes.

Section. 2. De la propagation du son.

Cap. I. De la vitesse du son.

Cap. II. De la réflexion du son, ou des echos.

Cap. III. Du mélange, & du rapport des sons.

Réflexions sur les quantités imaginaires par M. le CHEVALIER
DAVIET DE FONCENEX.

E R R A T A

*Pour le Mémoire sur le fluide élastique qui se développe
de la Poudre à Canon.*

Pag. 9	lin. 33	interdiraient	lisés	interdirait
14	4	(r) Com. pag.		(r) Com. pag. 12.
14	12	ne peut-il		ne puisse.

In Dissertatione de analogia magnetismi, & electricitatis.

47	32	eo una vitri	ex una vitri
57		not. b secundos	secandos

In Dissertatione circa putrefactionem.

75	1	quanti	quanti ad
86	5	morborum	morborum caussis.

In fasciculo stirpium Sardiniae.

88	6	Allionus.	Allionius
	16	integerrimus.	integerrimis
89	7	Alchemilla	Alchimilla
	13	514.	524.
	16	avenis.	aveniis
92	4	cordalis	cordatis
	19	nervosis	nervosis
96	20	refuscente	rufescente
	32	Vinea.	Vicia
97	5	lapasanae.	lampsanae
	19	Oenante	Oenanthe

In observationibus de glanduloso Ovarii corpore.

	20	fatis	fatis
106	10	continuatās	continuatæ
108	4	ut	ac

*Pour la suite des recherches sur le fluide élastique
de la Poudre.*

116	20	plus bas.	plus haut.
129	30	dans l'eau	& de l'eau
135	27	(a)	(r)

Pour la Dissertation sur le son.

Page 11 ligne 1 Qui est la même expression &c.
lisez qui se réduit à la même expression &c.

En effet ayant supposé dans l'art. 4. que la force motrice dans l'échelle $PHShP$ fut simplement $= \frac{QM-MR}{HK} \times M$, l'on doit de même ici exprimer les forces motrices des particules par $\frac{M d^2 y}{dt^2}$, ou bien supposer $\frac{2h}{T} = 1$.

Page 13 ligne 16 on aura fin. $efg = \frac{y''' - 2y'' + y'}{r}$,
lisez on aura fin. $efg = - \frac{y''' - 2y'' + y'}{r}$. Mais
cette erreur n'influe en rien dans le reste du calcul, parce-
que les différentielles $d^2 y$ doivent être aussi prises négativement.

Page 14 ligne 10 mettez l'art. 10. avant Imaginons.

Page 15 ligne 3 au lieu de l'art. 10. lisez article 11.

Page 19 ligne 14 de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ lisez de la quan-
tité $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; dans la ligne suivante au bout d'un tems $\frac{a}{\sqrt{c}} =$
 $T \sqrt{\left(\frac{S a}{2 P b}\right)}$ lisez au bout d'un tems $\frac{2a}{\sqrt{c}} = 2 T \sqrt{\left(\frac{S a}{2 P b}\right)}$;
dans la ligne 17 c'est pourquoi, lisez mais.

Page 33 ligne 4 au lieu de (art. 20.) posez (art. 21.)

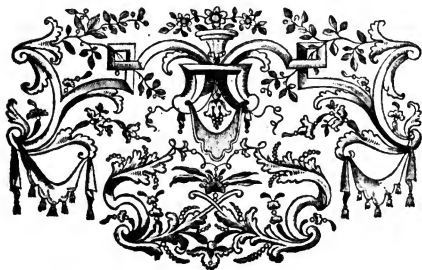
Page 30 ligne 8 au lieu de Chap. III. lisez Chap. II.

Page 57 ligne 10 au lieu de fin. $\frac{\pi H t}{2 T}$ lisez cos. $\frac{\pi H t}{2 T}$.

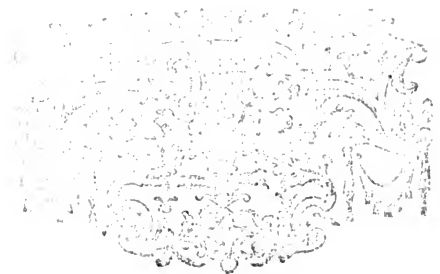
Page 71 ligne 16 à l'ordonnée MN , & à l'unité,
lisez à l'ordonnée MN , & à la quantité constante $\frac{aH}{T}$;
dans la même page ligne 18 aux abscisses $a m = a' m'$,
ajoutez ces aires étant divisées par $\frac{aH}{T}$.

Page 101 ligne 9, qu'on a enseigné article cité,
lisez qu'on a enseigné article 38.

Page 112 ligne dernière conterons, lisez contenterons.



THE ... OF ...
...
...



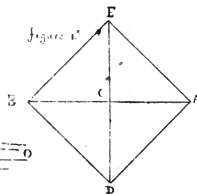
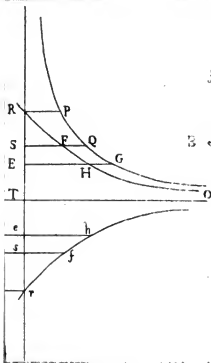
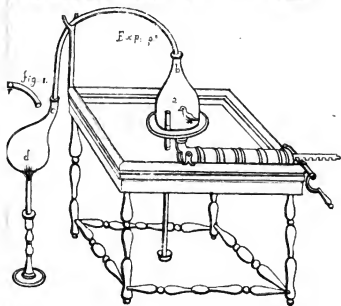


Planche 2.

Fig. 6.

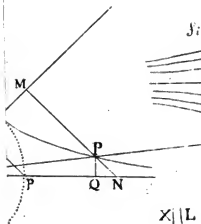
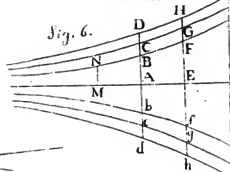


Fig. 4.

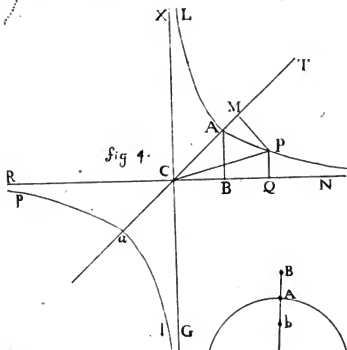
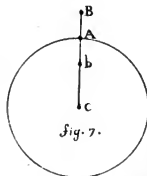


Fig. 7.



a P C P A

Fig. 2.



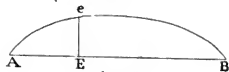
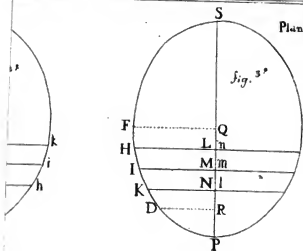


Fig. 5^e

